INSTITUTE FOR POLICY SCIENCE RESEARCH REPORT NO. 87-B-5

企業体の効率性分析手法

ＤＥＡについて

刀根　薫

１９８７年7月１５日

企業体の効率性分析手法ＤＥＡについて

刀根　薫（埼玉大学政策科学研究科）

はじめに

企業体の効率性に関する論議はどちらかといえば相対的な観点からなされることが多い。「あそこの支店はどこそこの支店よりうまくやっている」といった類の評価である。そして多基準的でもある。単に利益を上げるばかりが目的ではなく、売上高、品揃え、社会的責任、公害などの多くの出力を持つ。また入力の方も人件費、宣伝費、売り場面積など多様である。こういった多種類の入力に対してその企業体がどれだけの出力を産出しているかが問われることになる。比率尺度（ratio scale）が用いられるゆえんである。一方、公共企業体の活動ともなれば、入力、出力ともに多くの法的制約が存在し、また予算制約がつく。逆に、効率性の問題は二次的になりがちである。しかしこの分野でも最近、効率性は重要なテーマとなってきた。

これから述べる「Ｄ効率分析法」（Data Envelopment Analysis:ＤＥＡ）はその様な多入力、多出力系のシステムの相対的な効率判定を目的とし、テキサス大学のチャーンズ教授とクーパー教授が中心となって開発しつつある手法である。この方法によれば、企業体の相対的なＤ効率性が判明し、効率的なフロンティアに達していない企業体のどこを改善すればそこに達するようになるかの示唆が得られる。

また様々な非効率性が「システム」に起因するものか「マネジメント」に起因するものであるかについてもこの手法を用いて検討することができるし、更に、「最も効率的なスケール」に関する具体的な議論も展開することが可能である。　以下、この手法について次の順に説明する。

1．Ｄ効率とは

2．分数計画から線形計画へ

3．Ｄ効率分析の前提条件と効率的フロンティア

１．Ｄ効率とは

先ず工学的問題の効率性について述べ、次にその展開として、多入力、多出力のシステムの効率性について述べる。

１．１　効率の良し悪し

Ｄ効率（DEA efficiency）と呼ぶ基準は、次のような工学的な効率表現のごく自然なアナロジーである。

［例１］ボイラーの熱効率

あるボイラーは１単位の燃料入力（$x_r=1$とする）に対してy_rの出力を産むとする。理想的なボイラーは------それが存在すると仮定して------１単位の入力（$x_R=1$とする）に対してy_Rの出力を産むものとする。このとき当該ボイラーの熱効率は、

$$E_r=y_r/y_R \qquad (1.1)$$

として表現することができる。一般に

$$0\leqq E_r\leqq 1 \qquad (1.2)$$

であり、１に近いほど効率はよい。

この問題は次のように、多少無理やりに、分数計画法に定式化される。

目的関数 $$\max_{u,v}\ h_r=uy_r/vx_r \qquad (1.3)$$

制約

$$uy_r/vx_r\leqq 1 \qquad (1.4)$$

$$uy_R/vx_R \leqq 1 \qquad (1.5)$$

$$u \geqq 0,\ v \geqq 0 \qquad (1.6)$$

この分数計画の最適解は（５）の制約がきくので、

$$u^*/v^* = x_R/y_R \qquad (1.7)$$

を満たし、そのとき目的関数は

$$h_r^* = x_R y_r / x_r y_R$$

となるが、$x_r = x_R = 1$であるから

$$h_r^* = y_r/y_R \qquad (1.8)$$

となって上記の熱効率E_rと一致する．

［例２］預金の効率性

入力x_j（預金額）に対して、出力y_j（利子）を産出する預金が$j=1,...,n$までｎ種類あるとする．仮に入力の大きさに関わらず利子率y_j/x_jが各種預金毎に一定であると仮定すれば、もっとも効率的な預金種は、$\max(y_j/x_j)$ $(j=1,...,n)$を与えるものになるが、これも、多少無理やりに、次の分数計画に定式化できる。

各$j_0(=1,...,n)$につき次の分数計画法を解く．

目的関数 $$\max_{u,v} h_{j_0} = uy_{j_0}/vx_{j_0} \qquad (1.9)$$

制約 $$uy_j/vx_j \leqq 1 \quad (j=1,...,n) \qquad (1.10)$$

$$u \geqq 0,\ v \geqq 0 \qquad (1.11)$$

あるj_0の最適目的関数値が$h_{j_0}=1$ならば，j_0は効率的な預金であり，$h_{j_0}<1$ならば非効率的であることは言うまでもない．h_{j_0}が1に近いほど効率的である．

この例の場合、前のボイラーのように絶対的な効率的フロンティアは不明であるので、評価は相対的にならざるを得ない。

１．２ 多入力、多出力のＤ効率

チャーンズとクーパーは、分析の対象となる企業体を一般にＤＭＵ（Decision

Making Unit）と呼んでいる。本稿では、それをDMUまたは活動と呼ぶことにする。分析の対象は同種の入力と同種の出力を持つものとする。例えば、チェーン店、スーパー、（一般的な）支店、学校、発電所、病院等々である。これらはそれぞれのカテゴリごとに似たような機能を持って活動している。但しある程度の独立した経営上の権限は持っているものとする。各DMUは複数個の入力と出力を持つ。各DMU j毎に

入力　(x_{ij}) $(i=1,...,m)$　（m種類の入力）

出力　(y_{rj}) $(r=1,...,s)$　（s種類の出力）

とし、データとして与えられているものとする。

入力として何を採用し、出力として何を採用するかは大きな問題であるが、その点はちょっと脇において話を進めるとして、一般に入出力値とも非負であり、入力値は小さい程、出力値は大きい程よいものとする。

これらのデータをもとに各DMU j_0(=1,...,n)ごとに次の分数計画法＜ＦＰ＞を考える。

＜ＦＰ＞

目的関数　$$\max_{u,v} h_{j_0} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0} / \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} \qquad (1.12)$$

制約　$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leqq 1 \quad (j=1,...,n) \qquad (1.13)$$

$$u_r > 0 \quad (r=1,...,s) \qquad (1.14)$$

$$v_i > 0 \quad (i=1,...,m) \qquad (1.15)$$

この分数計画の意味は次の通りである。入力（一般に複数）と出力（一般に複数）にそれぞれウエイト(v_i),(u_r)をかけて和をとり（加重和）、両者の比を作る。その値がすべてのDMUについて１以下という条件下で、当該のDMU j_0の比を最大にするようにウエイト(v_i),(u_r)の値を決める。

この分数計画の最適解を(u^*,v^*)とし、最適目的関数値を$h_{j_0}^*$とする。このとき、一般に

$$0<h_{j_0}{}^{*}\leqq 1 \qquad (1.16)$$

である。D効率性を次のように定義する。

［定義１］

$h_{j_0}{}^{*}=1$であるDMUをD効率的と呼び、$h_{j_0}{}^{*}<1$であるDMUをD非効率的という。

２．分数計画法から線形計画法へ

＜ＦＰ＞は次のように＜ＬＰＯ＞に変形できる．以下、Σ記号の下にrがついている場合はr=1からsまで、iがついている場合はi=1からmまで、jがついている場合はj=1からnまでの和とする。また、添字の意味が明らかな場合にはΣ記号だけで用いることもある。

＜ＬＰＯ＞

目的関数　$\max\ z_{j_0}=\sum_r u_r y_{rj_0}$　（２．１）

制約　$\sum_i v_i x_{ij_0}=1$　（２．２）

$\sum_r u_r y_{rj}-\sum_i v_i x_{ij}\leqq 0 \quad (j=1,...,n)$　（２．３）

$u_r>0 \quad (r=1,...,s)$　（２．４）

$v_i>0 \quad (i=1,...,m)$　（２．５）

＜ＬＰＯ＞の最適解を(u^*,v^*)とすれば、それは＜ＦＰ＞の最適解と定数倍を除いて一致する。従って、＜ＬＰＯ＞の最適目的関数値$z_{j_0}{}^{*}=1$ならば、活動j_0はD効率的である。

２．１　D効率的フロンティア

DMU j_0に関する＜ＬＰＯ＞の最適解を(u^*,v^*)とする。その値は一般にj_0に依存して決まるので、j_0という添え字をつけて区別したほうがよいが、若干わず

らわしので、単に(u^*, v^*)と書くことにする．

いま、(u^*, v^*)に関するD効率的フロンティアを次の（添え字の）集合$E(j_0)$として定義する．

［定義２］Ｄ効率的フロンティア

$$E(j_0)=\{j:\sum_r u_r^* y_{rj}-\sum_i v_i^* x_{ij}=0,\ j=1,...,n\} \qquad (2.6)$$

各j_0につき$E(j_0)$が空でないことは自明である。j_0自身が$E(j_0)$にはいっている場合にはj_0はD効率的であるが、そうでない場合には、

$$z_{j_0}^*<1 \qquad (2.7)$$

であり、

$$\sum_r u_r^* y_{rj_0} < \sum_i v_i^* x_{ij_0} =1 \qquad (2.8)$$

である。

そこで、y_{rj_0}の一部または全部を増加させて左辺を１にすることができれば、活動j_0をD効率化することができる。u_r^*の値はそのときy_{rj_0}の一単位の変化に対する効率性への感度を意味している。感度係数として利用することもできる。　もし、装置工業の場合のように、ある出力が他の出力の値と連動して動くような場合には、そのことを考慮して、出力を一様に変化させることも考えられる。

２．２　入力を目的関数とするＬＰ化

＜ＦＰ＞を次のようにＬＰ化することもできる。

＜ＬＰＩ＞　目的関数

$$\min_{u,v}\ w_{j_0}=\sum_i v_i x_{ij_0} \qquad (2.9)$$

制約

$$\sum_r u_r y_{rj_0}=1 \qquad (2.10)$$

$$\sum_r u_r y_{rj}-\sum_i v_i x_{ij} \leqq 0 \quad (j=1,...,n) \qquad (2.11)$$

$$u_r>0 \quad (r=1,...,s) \tag{2.12}$$

$$v_i>0 \quad (i=1,...,m) \tag{2.13}$$

この＜ＬＰＩ＞の最適解を(u,v)とし、最適目的関数値をw_{j_0}とすれば、

$$z_{j_0}{}^*=1/w_{j_0} \tag{2.14}$$

という関係が成立する。

また、$(u/w_{j_0}, v/w_{j_0})$は，＜ＬＰＯ＞の最適解である。逆に、＜ＬＰＯ＞の最適解(u^*,v^*)から＜ＬＰＩ＞の最適解$(u^*/z_{j_0}{}^*, v^*/z_{j_0}{}^*)$を作ることもできるので、どちらを解いても同じことである。従って、(u,v)をもとに定義するＤ効率的フロンティアは(u^*,v^*)のそれと同一である。

（ｉ）　$w_{j_0}=1$ならば、j_0はＤ効率的

（ｉｉ）　$w_{j_0}>1$ならば、j_0はＤ非効率的

であるが、後者の場合、

$$1=\Sigma u_r y_{rj_0}<\Sigma v_i x_{ij_0} \tag{2.15}$$

であるから、入力x_{ij_0}のどれかまたは全部をある量だけ減少させて、右辺を１にできればDMU j_0はＤ効率的に転化する。これが入力の制御による効率化であり、出力の場合と同じ様にv_iの値は感度として利用することができる。

２．３　ＬＰの解の利用法

すでに前項でも述べたように、＜ＬＰＯ＞や＜ＬＰＩ＞の最適解をもとに入力、出力をそれぞれ別々に変化させてＤ効率化を試みることもできるが、一般には入力、出力は連動して変化する傾向がある。その様な場合でも、上の関係を利用することができる。要は、

$$\Sigma u_r{}^* y_{rj_0}-\Sigma v_i{}^* x_{ij_0}=0 \tag{2.16}$$

がj_0について成立するように(y_{rj_0})と(x_{ij_0})を連動させればよい。そのとき、

$$\Sigma v_i{}^* x_{ij_0}=1$$

という制約は一般に崩れるが、それは本質的に問題とならない。元の問題＜ＦＰ＞の目的関数は、入、出力の比として定義されているからである。

２．４　ＬＰを解くに当たっての注意事項

普通のＬＰでは変数は非負条件を満たすことが前提となっているが、＜ＦＰ＞，＜ＬＰ０＞，＜ＬＰＩ＞では、

$$u_r>0,\ v_i>0 \qquad (2.17)$$

という正値条件をしている。このことは、どの入力もどの出力も評価点を持たせたいという強い意志を表明していることに当たるが、これを単に非負条件として問題を解くとＤ効率性の判定で明らかな見誤りが発生することがあることにもよる。

ＬＰを具体的に解くには、この条件は

$$u_r \geqq \varepsilon\ (r=1,...,s) \qquad (2.18)$$

$$v_i \geqq \varepsilon\ (i=1,...,m) \qquad (2.19)$$

という制約にした上で、$\varepsilon=10^{-4}$-10^{-8}程度に設定するとよい。

２．５　Ｄ効率分析と従来の方法の関係

これまで述べてきたことからもわかるように、ＤＥＡは結果的に、複数個の入力と出力にそれぞれウエイトを掛けて和を作り、出力／入力という比率で効率性を見ようとするものである。そのウエイトの値を従来は人間の感や経験に頼って決めていたものを、データ自身に決めさせる点に特徴がある。しかもそのウエイトを対象とする意志決定者毎に可変とし、ある意味でその対象にとって最も好ましいウエイトづけをした上で、効率性の判定をする。その結果ＤＥＡで非効率的と判定されたDMUは他のどんなウエイト付けによっても非効率的であると結論できる。その対象にとって効率的フロンティアの存在とそれからのかい離も明らかにする。このフロンティアへの移行により、より少ない入力でより多くの出力が得られるよう導かれるのである。

しかしながらこの考え方には、入力と出力の対(x,y)----これを一般に活

動と呼ぶことにする----の可能な集合に対して、いくつかの仮定が設定されたことを意味する。その点を次節で明らかにし、更に分析を進める。

３．Ｄ効率分析の前提条件

＜ＦＰ＞の制約条件は次のようなものである。

$$\sum_r u_r y_{rj} / \sum_i v_i x_{ij} \leqq 1 \qquad (j=1,...,n) \qquad (3.\ 1)$$

$$u_r > 0 \qquad (r=1,...,s)$$

$$v_i > 0 \qquad (i=1,...,m)$$

このことはDMUの入力と出力の関係に関して大きな仮説を設けたことになる。その点について説明する。

３．１　活動の凸錐性

いま、活動の集合をＴとする。Ｔの要素が（３．１）式を満すという前提のみから選ばれるとすれば、Ｔは次の性質を持つ。

A1)　$(x,y) \in T$ ならば正のkに対して

$$(kx,ky) \in T \qquad (3.\ 2)$$

A2)　$(x_1,y_1) \in T$ ，$(x_2,y_2) \in T$ならば、$0 \leqq \lambda \leqq 1$を満たす任意のλに対して、

$$((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,(1-\lambda)y_1+\lambda y_2) \in T \qquad (3.\ 3)$$

A3)　$(x,y) \in T$ ならば、$y_1 \leqq y$, $x_1 \geqq x$なる任意のy_1, x_1に対して

$$(x_1,y_1) \in T \qquad (3.\ 4)$$

以上のことからＴは凸錐をなすことがわかる。より厳密に言えば、与えられたデータ(x_j,y_j) $(j=1,...,n)$に対してＴは、それらの点を含みかつA1),A2),A3)を満たす最小の凸錐である。（図１参照）

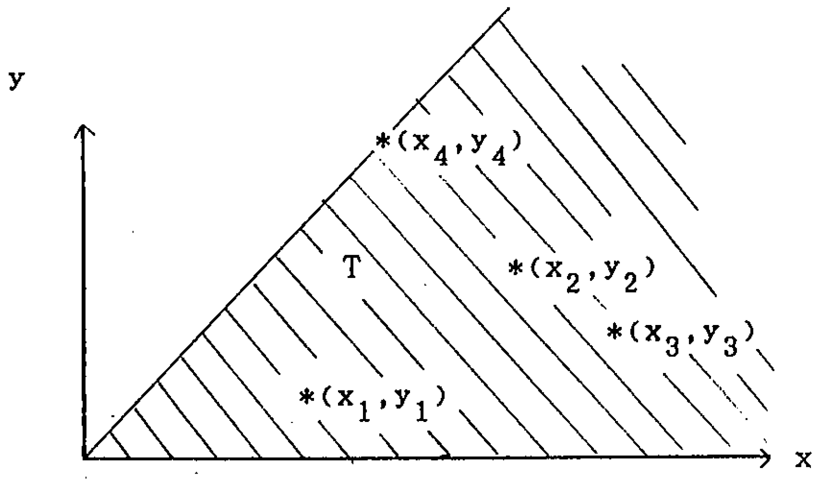

図１．凸錐Ｔ

３．２　効率性の双対ＬＰによる考察

＜ＬＰＯ＞の双対問題は次の通りである。

＜ＬＰＤＯ＞

目的関数　$\min\ \xi_{j_0} = f_{j_0} - \varepsilon(\Sigma s_r^{+} + \Sigma s_i^{-})$　　（３．５）

制約　$f_{j_0} x_{ij_0} - \sum_j x_{ij} \lambda_j - s_i^{-} = 0 \quad (i=1,\dots,m)$　（３．６）

$\sum_j y_{rj} \lambda_j - s_r^{+} = y_{rj_0} \quad (r=1,\dots,s)$　（３．７）

$\lambda_j \geqq 0 \quad (j=1,\dots,n)$　（３．８）

$s_r^{+} \geqq 0 \quad (r=1,\dots,s)$　（３．９）

$s_i^{-} \geqq 0 \quad (i=1,\dots,m)$　（３．１０）

f_{j_0} は符号無制約　（３．１１）

ここに$f_{j_0}, \lambda_j, s_r^{+}, s_i^{-}$はそれぞれ（２．２），（２．３），（２．４），（２．５）に対する双対変数である。ただし（２．４），

（２．５）は無限小正数εを導入して（２．１８），（２．１９）の形にしている。すなわち

$$u_r \geqq \varepsilon \quad 又は \quad -u_r \leqq -\varepsilon \quad (r=1,...,s) \qquad （３．１２）$$

$$v_i \geqq \varepsilon \quad 又は \quad -v_i \leqq -\varepsilon \quad (i=1,...,m) \qquad （３．１３）$$

として取り扱っている。

この双対問題を用いてＤ効率性を検討してみる。

（ａ）j_0がＤ効率的である場合

そのとき<ＬＰＯ>の最適目的関数値は１である。

$$z_{j_0}^{*}=1$$

よって、双対定理より<ＬＰＤＯ>の最適目的関数値も１である。εが無限小ではあるが正数であることに注意すれば

$$\begin{aligned} & f_{j_0}^{*}=1 \\ & s_r^{+*}=0 \quad (r=1,...,s) \qquad （３．１４） \\ & s_i^{-*}=0 \quad (i=1,...,m) \end{aligned}$$

であることがわかる。さらに、相補性定理より

$$\lambda_j^{*}=0 \quad : \quad j\in E(j_0)のとき \qquad （３．１５）$$

であることがわかる。ここに$E(j_0)$はＤ効率的フロンティア

$$E(j_0)=\{j : \Sigma u_r^{*}y_{rj}-\Sigma v_i^{*}x_{ij}=0,\ j=1,...,n\}$$

である。

以上のことから

$$\begin{aligned} & f_{ij_0}^{*}=1 \\ & s_r^{+*}=0 \quad (r=1,...,s) \\ & s_i^{-*}=0 \quad (i=1,...,m) \\ & \lambda_j^{*}=1 \quad : \quad j=j_0のとき \qquad （３．１６） \\ & \qquad =0 \quad : \quad j\neq j_0のとき \end{aligned}$$

とすれば、これらの値は＜ＬＰＤＯ＞の最適解であることがわかる。そしてλ_j^*の値（$j=j_0$のとき１、それ以外のとき０）はDMU j_0の効率性が自分自身の入力と出力の比率によって決定され得ることを示唆している。この点で次に見るように、非効率的なDMUと著しく異なる性格をもつのである。

（ｂ）j_0がＤ非効率的である場合

このとき

$$z_{j_0}^*<1$$

であり、双対定理より

$$f_{j_0}^*<1 \qquad (3.17)$$

となる。また相補性より

$$\lambda_{j_0}^*=0 \qquad (3.18)$$

である。よって（３．６）、（３．７）は次のようになる。

$$f_{j_0}^* x_{ij_0}=\sum_{j\in E(j_0)} x_{ij}\lambda_j^* +s_i^{-*} \quad (i=1,...,m) \qquad (3.19)$$

$$y_{rj_0}=\sum_{j\in E(j_0)} y_{rj}\lambda_j^* -s_r^{+*} \quad (r=1,...,s) \qquad (3.20)$$

ベクトル記号を用いれば次のようになる。

$$f_{j_0} x_{j_0}=\sum_{j\in E(j_0)} \lambda_j^* x_j +s^{-*} \qquad (3.21)$$

$$y_{j_0}=\sum_{j\in E(j_0)} \lambda_j^* y_j -s^{+*} \qquad (3.22)$$

この式は活動Ｔが満足した３つの性質 A1), A2), A3) をもとに解釈することができる。先ず

$$(\sum_E \lambda_j^* x_j, \sum_E \lambda_j^* y_j)=\sum_E \lambda_j^*(x_j,y_j) \qquad (3.23)$$

であるから左辺の活動は右辺にある効率的フロンティアの活動の非負１次結合として表現される。更にs^{-*}, s^{+*}の非負性と性質 A3) より

$$(\sum \lambda_j^* x_j +s^{-*},\ \sum \lambda_j^* y_j -s^{+*})$$

は１つの活動である。さらに$f_{j_0}^*<1$であるから、活動(x_{j_0}, y_{j_0})は効率的フロンティアの活動によって完全に記述されたことになる。すなわちDMU j_0を除いて、Tを作ったとしても、それを加えた場合のTと同一であり、それが他の効率的フロンティアの内に埋もれてしまうことを意味する。経営体としては”特色”の少ないことを示している。

このような活動を効率的フロンティアまで引き上げる一つの方法は

（１）　スラックs^{-*}及びs^{+*}をゼロにする---入力の遊びをカットし出力の不足を補う

（２）　さらに$f_{j_0}^* x_{j_0}$を新入力とするような一率の入力削減を行う。
（$f_{j_0}^*<1$であることに注意）

こうすれば、活動j_0は効率的フロンティアに引き上げられる。もっとも上の方法はあくまでも一つの考え方であり、状況に応じてさまざまな対応が考えられる。

また、繰り返し注意したいことは、上記の分析は活動の集合TがA1)，A2)，A3)を満たす場合にだけ通用するということであり、この前提条件が満たされない場合は、それぞれの場合に応じた検討が必要となる。この点に関しては第５節において再考する。

４．例題１

ここでこれまで述べてきたことを、小さい例題をもとに説明する。２入力、１出力のシステムを考える。６コの活動があり、その入力、出力の値は表１の通りとする。

活動（j）		1	2	3	4	5	6
入力	x_{1j}	4	6	8	4	2	10
	x_{2j}	3	2	1	2	4	1
出力	y_j	1	1	1	1	1	1

表１　入力と出力

出力がすべて1になっているが、これは各活動の出力を等しくなるように入力値を調整した結果である。1出力の場合はこのような調整ができるが、一般的には不可能である。次のDMUについて検討を進める。

（a）$j_0=2$の場合

このとき<LPO>は次のようになる

$$\max \quad z_2=u \qquad (3.24)$$

制約

$$6v_1+2v_2=1$$
$$u-4v_1-3v_2 \leqq 0$$
$$u-6v_1-2v_2 \leqq 0$$
$$u-8v_1-v_2 \leqq 0$$
$$u-4v_1-2v_2 \leqq 0$$
$$u-2v_1-4v_2 \leqq 0$$
$$u-10v_1-v_2 \leqq 0$$
$$u \geqq \varepsilon, \quad v_1 \geqq \varepsilon, \quad v_2 \geqq \varepsilon$$

このLPの最適解は次の通りである。

$$z_2^* = u^* = 6/7$$
$$v_1^* = 1/14$$
$$v_2^* = 2/7$$

$z_2^*<1$であるから活動2はD効率的ではない。この活動に対する効率的フロンティアはj＝3，4である。すなわち

$$E(2) = \{3、4\}$$

である。

LP(3.24)の双対問題は次のようになる。

$$\min \quad \zeta_2 = f_2 - \varepsilon\,(s^+ + s_1^- + s_2^-)$$

制約

$$6f_2-4\lambda_1-6\lambda_2-8\lambda_3-4\lambda_4-2\lambda_5-10\lambda_6-s_1^- = 0$$
$$2f_2-3\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4-4\lambda_5-\lambda_6-s_2^- = 0$$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6 - s^+ = 1$

$\lambda_j \geqq 0 \quad (j=1,\cdots,6)$

$s^+ \geqq 0,\ s_1^- \geqq 0,\ s_2^- \geqq 0$

この双対問題の最適解は

$\zeta_2^* = f_2^* = 6/7$

$\lambda_3^* = 2/7$, $\lambda_4^* = 5/7$

その他の λ_j^* と s^{+*}, s_1^{-*}, s_2^{-*} は0である。

このことより活動２の入力ベクトルは

$6/7 * (6, 2) = 2/7 * (8, 1) + 5/7 * (4, 2)$

出力は

$1 = 2/7*1 + 5/7*1$

として活動３、４により表現される。前に考察したことにより活動２の入力を一様に6/7(=f_2^*)倍した点

$6/7*(6, 2)$

はＤ効率的な活動である。

E(2)に入っている活動３、４がＤ効率的であることは容易にわかることである。

（ｂ）$j_0=1$ の場合

$j_0=1$に対しては、E(1)={4､5}であり活動１は非効率的である。活動５はＤ効率的である。

（ｃ）$j_0=6$の場合

このとき＜ＬＰＯ＞は次のようになる。

$\max\ z_6 = u$

制約

$10v_1+v_2=1$

$u-4v_1-3v_2 \leqq 0$

$u-6v_1-2v_2 \leqq 0$

$$u-8v_1-v_2 \leqq 0$$
$$u-4v_1-2v_2 \leqq 0$$
$$u-2v_1-4v_2 \leqq 0$$
$$u-10v_1-v_2 \leqq 0$$
$$u \geqq \varepsilon, \quad v_1 \geqq \varepsilon, \quad v_2 \geqq \varepsilon$$

このLPの最適解は

$$u^* = 1-2\varepsilon$$
$$v_1^* = \varepsilon$$
$$v_2^* = 1-10\varepsilon$$

であり、活動6はD効率的ではない。このLPの双対問題は次の通りである。

$$\min \ \zeta_6 = f_6 - \varepsilon(s^+ + s_1^- + s_2^-)$$

制約
$$10f_6-4\lambda_1-6\lambda_2-8\lambda_3-4\lambda_4-2\lambda_5-10\lambda_6-s_1^- = 0$$
$$f_6-3\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_4-4\lambda_5-\lambda_6-s_2^- = 0$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6-s^+ = 1$$
$$\lambda_j \geqq 0 \quad (j=1,\cdots,6)$$
$$s^+ \geqq 0, \quad s_1^- \geqq 0, \quad s_2^- \geqq 0$$

このLPの最適解は

$$f_6^*=1$$
$$\lambda_3^*=1$$
$$s_1^{-*}=2$$

その他のλ_j^*, s^{+*}, s_2^{-*}は0である

また

$$\zeta_6^*=1-2\varepsilon$$

である。この結果、活動6の入力は次のように表される。

$$\underset{\text{活動6}}{(10,\ 1)} = \underset{\text{活動3}}{(8,\ 1)} + \underset{\text{スラック}}{(2,\ 0)}$$

効率的な活動３にスラックを加えたものが活動６であり、しかも出力は同じであることから非効率的であることがわかる。

図２に各DMUの入力値と効率的フロンティアをしめす。

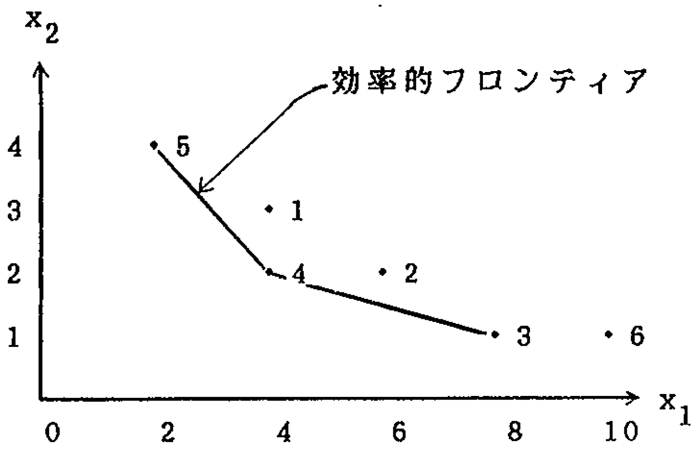

図２．例題の図解

５．生産関数に関する想定とＤＥＡ変更

前に第３節で注意したように、ＤＥＡではDMUの入力と出力の対が凸錐をなすという仮定を採用している。入力と出力の関係をごく一般的に”生産関数”と呼ぶことにするが、この節では生産関数の別の型を想定しそれに対するＤＥＡの変更について考察する。

５．１　活動の凸錐性

第３節では活動についてA1), A2), A3)の３つの仮定をした。そのうちA2), A3)は比較的無難な仮定であるがA1)については非現実的であるという指摘もなされている。そこで、ここではA1)を除きA2), A3)のみを仮定してみる。すなわち、

A2)　$(x_1, y_1) \in T$, $(x_2, y_2) \in T$ ならば $0 \leqq \lambda \leqq 1$ を満たす任意の λ に対して

$$((1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\ (1-\lambda)y_1+\lambda y_2) \in T \qquad (5.1)$$

A3)　$(x,y) \in T$　ならば　$x_1 \leqq x$，$y_1 \geqq y$なる任意のx_1, y_1に対して

$$(x_1, y_1) \in T \qquad (5.2)$$

いま与えられたデータ(x_j, y_j)($j=1,...,n$)に対してA2)，A3)を適用するならば次のように言い替えることができる。

$$(x_j, y_j) \in T \quad (j=1,...,n)$$

であるとき、

$$x \geqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \qquad (5.3)$$

$$y \leqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \qquad (5.4)$$

で表現される任意のx，yはTに属する。ここに

$$\lambda_j \geqq 0 \quad (j=1,...,n) \qquad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \qquad (5.6)$$

とする。（図３参照）

図３において与点の凸結合からなる領域Ｃと領域Ｐの和がＴである。

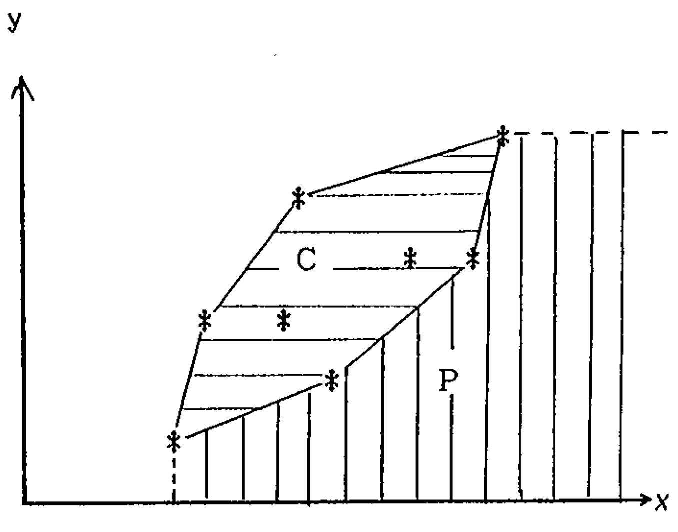

図３．領域Ｔ

５．２　ＤＥＡの変更

上の仮定に対応するＤＥＡを行うために先ず次の入力可能集合L(y)を定義する。

$$L(y)=\{x \mid (x,y)\in T\} \tag{５．７}$$

すなわちL(y)は出力yを生み出す可能性のある入力xの集合である。

いま、あるDMU(x_{j_0},y_{j_0})に対して$L(y_{j_0})$を考える。この$L(y_{j_0})$の中には、hをスカラーとしてhx_{j_0}という形のものが含まれている。実際 h=1 とすればx_{j_0}そのものである。

そこで

$$hx_{j_0}\in L(y_{j_0}) \tag{５．８}$$

の中でhを最小にするものを探す。もし、その最小値が、

$$h^*=1 \tag{５．９}$$

ならば(x_{j_0},y_{j_0})はＤ効率的であり

$$h^*<1 \tag{５．１０}$$

ならば非効率的であると定義する。

以上の考え方は次のＬＰに定式化される。

＜ＬＰＤＣ＞ 目的関数　min　$\omega=h$　　(５．１１)

制約　$hx_{j_0}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\geqq 0$　　(５．１２)

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geqq y_{j_0}$　　(５．１３)

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$　　(５．１４)

$\lambda_j\geqq 0\ \ (j=1,...,n).$　　(５．１５)

このＬＰの双対問題は次のとおりである。

＜ＬＰＣ＞

目的関数　　$\max z=\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0} - u_0$　　（５．１６）

制約　$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leqq 0 \quad (j=1,..,n)$　（５．１７）

$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 1$　　（５．１８）

$u_r, v_i \geqq 0 \quad (r=1,...,s \;:\; i=1,...,m)$　　（５．１９）

u_0は符号制約なし　　（５．２０）

＜ＬＰＣ＞は次の分数計画問題＜ＦＰＣ＞と等価である。

＜ＦＰＣ＞

目的関数　$\max h_{j0} = \dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0} - u_0}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0}}$　　（５．２１）

制約

$\dfrac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - u_0}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leqq 1 \quad (j=1,...,n)$　　（５．２２）

$u_r \geqq 0 \quad (r=1,...,s)$　　（５．２３）

$v_i \geqq 0 \quad (i=1,...,m)$　　（５．２４）

u_0は符号制約なし　　（５．２５）

ここで、u_r、v_rの非負条件を正条件にする。そのために無限小正数εを導入し、次の＜ＬＰＣ’＞と、その相対問題＜ＬＰＤＣ’＞を得る。

＜ＬＰＣ’＞

目的関数　$\max z=\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj_0} - u_0$

制約　$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leqq 0 \quad (j=1,...,n)$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij_0} = 1$$

$$u_r \geqq \varepsilon \quad , v_i \geqq \varepsilon$$

u_0は符号制約なし

＜ＬＰＤＣ’＞

目的関数　$\min \ w = h - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^{+} + \sum_{r=1}^{s} s_r^{-} \right)$

制約　$h x_{ij_0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij_0} \lambda_j - s_i^{+} = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j - s_r^{-} = y_{rj_0} \quad (r = 1, \ldots, s)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \ , \quad \lambda_j, s_i^{+}, s_r^{-} \geqq 0$$

これらの定式化が従来のＤＥＡと異なる点は自由変数u_0の導入である。このことにより仮定A1)が除去される。効率的フロンティアの定義やそれに基づく考察は従来のＤＥＡの場合と同様に展開することができる。

５．３　例題２

１入力、１出力の次の例を考察する。

j	1	2	3	4	5	6
x_j	1	2	2	3	4	4
y_j	2	4	6	2	5	7

表３　例題２

（ａ）j_0=1の場合

＜ＬＰＣ’＞は次の通り。

$$\max\ z=2u-u_0$$

制約　$v=1$

$2u-u_0-v\leqq 0$　$4u-u_0-2v\leqq 0$

$6u-u_0-2v\leqq 0$　$2u-u_0-3v\leqq 0$

$5u-u_0-4v\leqq 0$　$7u-u_0-4v\leqq 0$

$u\geqq \varepsilon$　$v\geqq \varepsilon$

最適解　$u^*=1/4$，$v^*=1$，$u_0^*=-1/2$

$z^*=1$

よってDMU1はＤ効率的である。ただし最適解は退化しており、$-1<u_0^*\leqq -1/2$ の範囲内で $u^*=(u_0^*+1)/2$ という関係で変化する。

（ｂ）$j_0=2$の場合

＜ＬＰＣ’＞は次の通り。

$$\max\ z=4u-u_0$$

制約　$2v=1$

他の制約は（ａ）の場合と同じ。

最適解　$u^*=1/8$，$v^*=1/2$，$u_0^*=-1/4$

$z^*=3/4$

よってDMU2はＤ非効率的である。

このとき＜ＬＰＤＣ’＞は次の通りである。

$$\min\ w=h-\varepsilon(s^++s^-)$$

制約　$2h-(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4+4\lambda_5+4\lambda_6)-s^+=0$

$(2\lambda_1+4\lambda_2+6\lambda_3+2\lambda_4+5\lambda_5+7\lambda_6)-s^-=4$

$\sum_{j=1}^{6}\lambda_j=1$，$\lambda_j\geqq 0$，$s^+\geqq 0$，$s^-\geqq 0$

最適解　$\lambda_1^*=1/2$，$\lambda_3^*=1/2$

他のλ_j, s^+, s^- は 0

$h^*=3/4$

この場合効率的フロンティアは

E(DMU2)= {DMU1, DMU3}

であり、効率的フロンティアの点

1/2*DMU1 + 1/2*DMU3

の入力を4/3倍したものがDMU2であることがわかる。逆の見方をすれば、DMU2の入力を3/4倍したならばDMU2は効率的フロンティアに達することがわかる。

(c) $j_0=3$の場合

<LPC'>は次の通り

$\max\ z=6u-u_0$

制約　$2v=1$

他は（a）と同じ

最適解　$u^*=1/6$,　$v^*=1/2$,　$u_0{}^*=0$

$z^*=1$

ただし最適解は退化しており、

$-1/4\leqq u_0{}^*\leqq 5$

の範囲内で

$u^*=(u_0{}^*+1)/6$

の関係により変化する。

(d) $j_0=6$の場合

<LPC'>は次の通り

$\max\ z=7u-u_0$

制約　$4v=1$

他は（a）と同じ

最適解　$u^*=1/2$,　$u_0{}^*=5/2$,　$v^*=1$

$z^*=1$

最適解は退化しており、

$$5/2 \leqq u_0{}^* \leqq \infty$$

の範囲内で

$$u^*=(u_0{}^*+1)/7$$

の関係により変化する。

DMU6はD効率的である。

図４に例題２の入出力を図示する。

効率的フロンティアはDMU1，DMU3，DMU6が属しており他は非効率的である。

もし生産関数の仮定をA1)，A2)，A3)とすれば、DMU3のみが効率的で他はすべて非効率と判定されることに注意する。

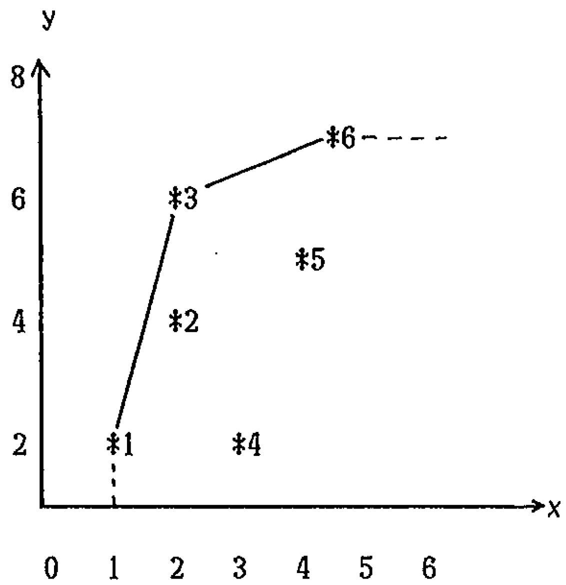

図４　例題２

6．規模の効率性に関する考察

前節で行った議論の延長上で規模の効率性に関する考察を試みる。ここでは効率的フロンティアにある活動(x_E, y_E)を対象とする。すなわち

$$\max\ z = \Sigma u_r y_{rE} - u_0$$

制約 $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leqq 0$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{iE} = 1$$

$$u_r \geqq \varepsilon,\ v_i \geqq \varepsilon$$

の最適解をu_r^*, v_i^*, u_0^*, z^*とするとき

$$z^* = 1$$

であるとする。

ここでδを非常に小さい数として、点$P_\delta = ((1+\delta)x_E, (1+\delta)y_E)$を考えるとこの点は活動$(x_E, y_E)$に極めて近い点である。この点が活動の集合に属するか否かでDMU Eの規模の効率性を次のように定義する。

［定義３］

（ａ）$\delta^*>0$が存在し、$\delta^*>\delta\geqq0$である任意のδに対して$P_\delta \in T$でありかつ、$-\delta^*<\delta<0$であるどのδに対しても$P_\delta \notin T$であるときDMU Eは規模の効率性が増加型であるという。

（ｂ）$\delta^*>0$が存在し、（ｂｉ）$\delta^*>|\delta|$であるどんなδに対しても$P_\delta \in T$であるか又は、（ｂｉｉ）$\delta^*>|\delta|>0$であるどんなδに対しても$P_\delta \notin T$であるとき、DMU Eは規模の効率性が一定であるという。

（ｃ）$\delta^*>0$が存在し、$\delta^*>\delta>0$であるどんなδに対しても$P_\delta \notin T$でありかつ、$-\delta^*<\delta\leqq0$であるどんなδに対しても$P_\delta \notin T$であるとき、DMU Eは規模の効率性が減少型であるという。

上のように定めた規模の効率性は＜ＬＰＣ’＞の最適解におけるu_0^*の値と関係することが以下の議論からわかる。

一般にDMU Eに関する＜ＬＰＣ’＞の最適解は退化している場合が多いので

$u_0{}^*$の値はユニークには決まらない。そこで最適解における$u_0{}^*$の最小値を$\underline{u}_0{}^*$とし、最大値を$\bar{u}_0{}^*$とする。そのとき次の定理が成立する。

［定理６．１］

Ｄ効率的なDMU Eに関して、

（Ａ）$\underline{u}_0{}^* < \bar{u}_0{}^* \leqq 0$ 又は $\underline{u}_0{}^* = \bar{u}_0{}^* < 0$ならばDMU Eは規模の効率性が増加型である。

（Ｂ）$\underline{u}_0{}^* < 0 < \bar{u}_0{}^*$ 又は $\underline{u}_0{}^* = \bar{u}_0{}^* = 0$ ならばDMU Eは規模の効率性が一定である。

（Ｃ）$0 \leqq \underline{u}_0{}^* < \bar{u}_0{}^*$ 又は $0 < \underline{u}_0{}^* = \bar{u}_0{}^*$ ならばDMU Eは規模の効率性が減少型である。

それぞれの場合について逆も成立する。

（証明）

先ず（ａ）、（ｂ）、（ｃ）と（Ａ）、（Ｂ）、（Ｃ）がそれぞれ三者択一的であることに注意する。

（ａ）＝＞（Ａ）の証明：

$\delta^* \geqq \delta > 0$である$\delta$に対して$P_\delta \in T$であることから

$$(1+\delta)\, y_E{}^T u^* - (1+\delta)\, x_E{}^T v^* - u_0{}^* \leqq 0 \qquad (6.5)$$

$(x_E,\ y_E)$がＤ効率的であることから

$$y_E{}^T u^* - x_E{}^T v^* - u_0{}^* = 0 \qquad (6.6)$$

よって

$$\delta\,(y_E{}^T u^* - x_E{}^T v^*) \leqq 0 \qquad (6.7)$$

である。ここで$\delta > 0$に注意すれば

$$y_E{}^T u^* - x_E{}^T v^* \leqq 0$$

であるが、（６．６）より

$$\bar{u}_0{}^* \leqq 0 \qquad (6.8)$$

を得る。

次に、$-\delta^* < \delta < 0$であるどのδに対しても$P_\delta \in T$であることと、Tの凸性から

$$(1+\delta)\ x_E \geqq \Sigma \lambda_j x_j \qquad (6.9)$$

$$(1+\delta)\ y_E \geqq \Sigma \lambda_j y_j \qquad (6.10)$$

$$\Sigma \lambda_j = 1 \qquad (6.11)$$

$$\lambda_j \geqq 0 \ (\forall j) \qquad (6.12)$$

には、$\delta < 0$である解(λ, δ)は存在しない。このことに非斉次Farkasの定（二者択一の定理）を適用すると、

$$-x_E^T v + y_E^T u - u_0 = 0 \qquad (6.13)$$

$$-x_j^T v + y_j^T u - u_0 \leqq 0 \quad (j=1...n) \qquad (6.14)$$

$$v^T x_E = 1 \qquad (6.15)$$

$$v \geqq 0,\ u \geqq 0 \qquad (6.16)$$

には

$$u_0 < 0 \qquad (6.17)$$

である解が存在することがわかる。この解を$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_0)$とすれば、これは＜ＬＰＣ＞の最適解である。さらに$(u^*, v^*, u_0^*)$と$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}_0)$の凸結合の点で、

$$v \geqq \varepsilon \cdot 1,\ u \geqq \varepsilon \cdot 1 \quad (1=(1,...,1)^T \in R^n) \qquad (6.18)$$

を満たすものが必ず存在するので、＜ＬＰＣ’＞の最適解の中には

$$u_0 < 0 \qquad (6.19)$$

を満たすものが必ず存在する。

（６．８）と（６．１９）より（Ａ）が導かれる。

全く同様の議論で（ｃ）から（Ｃ）が導かれる。

（ｂ）＝＞（Ｂ）の証明：

（ｂｉ）の場合，（ａ）（ｃ）の場合と同じ論法より

$$u_0{}^* = \underline{u}_0{}^* = \overline{u}{}^* = 0 \qquad (6.20)$$

を得る。

（bii）の場合、系（6．9）（6．10）（6．11）（6．12）にはδ＜0を満たす解が存在しないので、再び二者択一の定理を用いて

$$u_0 < 0$$

である解が存在することがわかる。またδ＞0を満たす解も存在しないので

$$u_0 > 0$$

である解が存在することがわかる。よって（B）が導かれた。逆が成立することは、（a）、（b）、（c）と（A）、（B）、（C）がそれぞれ三者択一的であることから明かである。

（Q.E.D.）

前節の例題2において、

（1）$j_0 = 1$は、$\overline{u}_0{}^* = -1/2 < 0$であるから規模の効率性は増加型である。

（2）$j_0 = 3$は、$-1/4 = \underline{u}_0{}^* < 0 < \overline{u}_0{}^* = 5$であるから規模の効率性は一定である。

（3）$j_0 = 6$は$0 < 5\,{}^1/_2 = \underline{u}_0{}^*$であるから規模の効率性は減少型である。

7．テクニカルな効率性と規模の効率性

我々は第2節でD効率性を定義し、それが＜ＬＰ０＞（（2．1）－（2．5）式を解くことによって得られることを示した。また第5節で生産関数に関する仮定の一部を除去し＜ＬＰ０’＞を設定するとともに、第6節でそれにもとずく規模の効率性について考察した。ここでその両者の関係を調べることにする。

＜ＬＰ０＞によって測定される効率性は当該ＤＭＵのテクニカル効率性と規模の効率性の合成されたものとみることができる。図5に1入力1出力の簡単な例を示す。点Ｅが＜ＬＰ０＞の意味でＤ効率的な唯一のＤＭＵである。

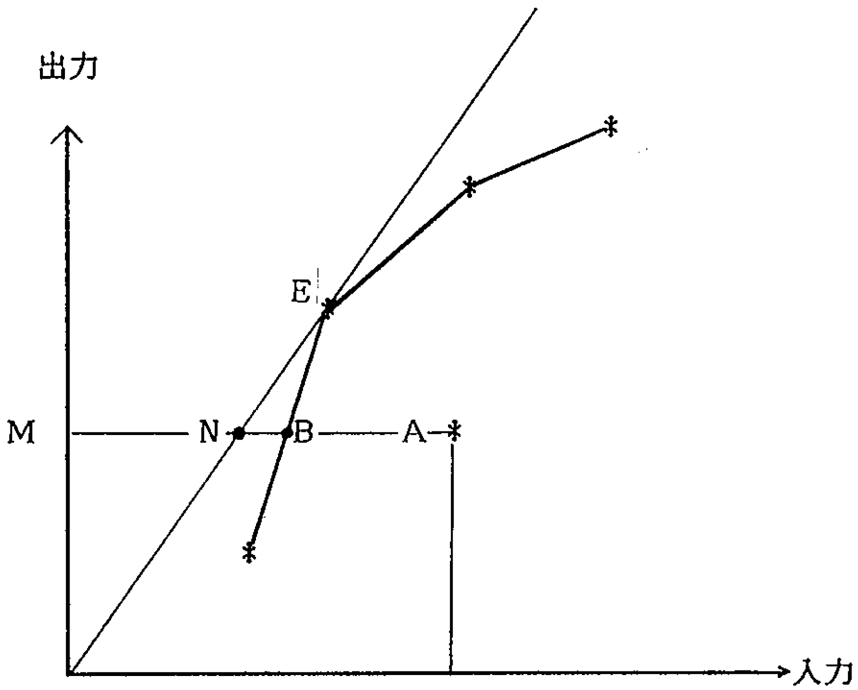

図５．テクニカル効率とスケール効率

点Ａ＝評価の対象となっているＤＭＵ

点Ｂ＝Ａと同じ出力をもつテクニカルに効率的なＤＭＵ

点Ｅ＝＜ＬＰＯ＞の解としてＤ効率的なＤＭＵ

ここで非効率的ＤＭＵ　Ａを取り出してみる。点Ａの＜ＬＰＯ＞の意味でのテクニカル効率とスケール効率の合成としての効率はＭＮ／ＭＡである。一方点Ａの点Ｂとの比較という意味でのテクニカル効率はＭＢ／ＭＡである。点Ｂは、＜ＬＰＯ’＞の効率的な解であり、テクニカルにＤ効率的なＤＭＵである。さらに、点Ｂが点Ｅに対してもつスケール効率はＭＮ／ＭＢである。この二つの効率の積として、Ａの＜ＬＰＯ＞の解としての効率は解釈することができる。

ＭＮ／ＭＡ＝（ＭＮ／ＭＢ）／（ＭＢ／ＭＡ）

８．マネジメントの効率とシステムの効率性

効率性の議論において留意すべき事項としてマネジメントの効率性とシステの

効率性の分離がある。仮にＡというシステムを採用しているＤＭＵ群とＢというシステムを採用しているＤＭＵ群があり、それらをプロットしたものが図６であるとする。図中、記号「＋」はＡシステムのＤＭＵ、記号「・」はＢシステムのＤＭＵを表わす。

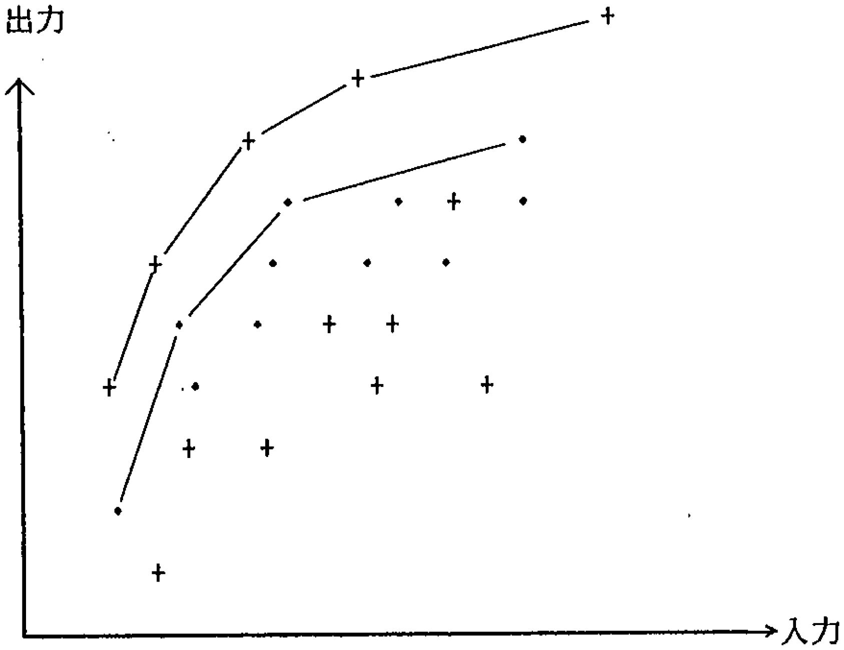

図６．２つのシステムに属するＤＭＵ

＋----システムＡのＤＭＵ

・----システムＢのＤＭＵ

１入力１出力のこれらのデータをもとに、単純な回帰分析あるいはトランスログ型の分析を行なったならばシステムＢがシステムＡより優れたシステムであるという結論に導かれるであろう（Ｂ群のＤＭＵの方が平均的に高い位置にある）。しかし、効率的フロンティアで比較するならばシステムＡの方がシステムＢより優れているという結果を得る。個々のＤＭＵがもつ非効率性はマネジメントの非効率性として考察すべきものである。従来の生産関数分析においてはこのような観点からの分析がなされることは少なかった----あるいは個々のＤＭＵは効率的な運営が なされているという仮定がなされていた----ので、ＤＥＡによる分

析はこの分野に新らしい視点を与えるであろう。

図６に示す例では、システムＡの効率的フロンティアはシステムＢを一様に越えていたが、両者のフロンティアが交差する場合も起りうる。
図７に２入力、１出力のＤＭＵを示す。出力はすべて１にしているので、この図は一種の等高線とみなすことができる。点線で示したものが、全体としての効率的フロンティアであり、A1，A2，A3，B3，B4からなっている。それに対して、Ａ群の効率的フロンティアは A1，A2，A3，A4，A5 であり、Ｂ群のそれはB1，B2，B3，B4である。このようにＡ＋Ｂ，Ａ群、Ｂ群という各分類毎にＤＥＡ分析をすることにより、システムのもつ効率性とマネジメントの効率性を分離して分析することができる。

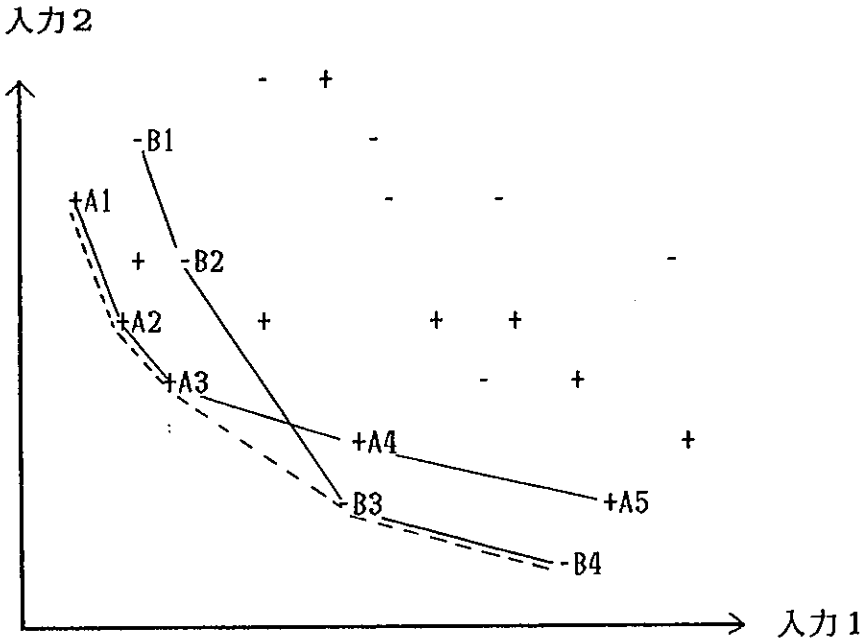

図７．交差する効率的フロンティア
＋ ---- システムＡのＤＭＵ
－ ---- システムＢのＤＭＵ

おわりに

本稿では、チャーンズ、クーパーにより提唱されたＤＥＡについて紹介

した。本稿の大部分はこれまで発表された文献（後記）に依っているが、定理６．１の証明の部分は新しいものである。

ＤＥＡは企業体の効率性分析に全く新しい観点を導入したものであり、今後多くの事例研究がなされることを期待する。そのことにより、理論面でも手法面でも一層の展開が行われるであろう。

文献

[1]Banker,R.D."Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis," European J. Oper. Res.,(1984),35-44.

[2]Banker,R.D.,A.Charnes and W.W.Cooper,"Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies," Management Sci.,(1984),1078-1092

[3]Charnes,A.,W.W.Cooper,B.Golany and L.Seiford,"Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions," J. Econometrics,(1985),91-107.

[4]Charnes,A.,W.W.Cooper and E.Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," European J. Oper. Res.,(1978),429-444.

[5]Charnes,A.,W.W.Cooper and E.Rhodes,"Evaluating Program and Managerial Efficiency ," Management Sci.,(1981),668-697.

[6]刀根、岡部、高木、間片、真木、渡辺、「ＤＥＡ事例集」、埼玉大学大学院政策科学研究科、（１９８７）（近刊）．