線形計画法
と
Karmarkar特許

刀根 薫

1989年9月1日

線形計画法　と　Ｋａｒｍａｒｋａｒ特許

刀根　薫　（埼玉大学大学院政策科学研究科）

Linear Programming and Karmarkar Patents

Kaoru Tone (Saitama University)

Abstract

We will briefly describe the three Karmarkar patents on linear programming: Karmarkar, Vanderbei and Bayer et al's. Also, algorithmic aspects of the patents will be shown. Recent trends in the intellectual property rights will be reported along with the pros and cons to the issues.

１．Karmarkar特許の概要

１．１　3つの特許

線形計画法に関する Karmarkar法 の特許は1988年5月10日の時点でｱﾒﾘｶ合衆国においてつぎの3つが成立している．（表１）

表１．　Karmarkar特許

	(1)	(2)	(3)
特許	Methods and apparatus for effficient resource allocation	Methods and apparatus for efficient resource allocation	Methods and apparatus for optimizing system parameters
番号	4,744,028	4,744,026	4,744,027
成立日	May 10, 1988	May 10, 1988	May 10, 1988
発明者	N. Karmarkar	R.J. Vanderbei	D.A. Bayer N. Karmarkar J.C. Lagarias
受託者	AT&T Bell Labs.	AT&T Bell Labs.	AT&T Bell Labs.
申請日	Apr. 19, 1985	Apr. 11, 1986	Aug. 22, 1986

1．２　共通した特徴

a．　Karmarkar が 1984 年 4 月に発表した論文 [5] ”A new polynomial time algorithm for linear programming.”に基づく内点法である．凸多面体の表面をたどる単体法との根本的な違いを強調するとともに Khachiyan の 1979 年の内点法との違いにも言及している．即ちこの発明が独創的で従来の方法にない特徴をもつものであることを示している．

b．　次節で述べるように，アルゴリズムの内容をある程度公開している．即ち全体の構成と各部分の役割，及びその内容が，この分野の知識のある人には理解できるように記述されている．ただし implementation の細部については書かれていない．たとえば，疎行列の処理法，疎行列を係数とする連立方程式の解法といった実際の coding に必要な手順については書いていない．即ち implementation のレベルまでは特定化しないでアルゴリズムのレベルにとどめている．その方が特許の網を広くかけられることは事実である．

c．　このアルゴリズムの適用できる分野とその適用方法を示している．具体的にはリソースを最適に利用するという立場から電話送信網の最適利用をはじめ工場の操業，プロダクトミックス，石油精製，コンピュータリソースのユーザーへの配分，航路操法，プロセスコントロール，リアルタイム制御といった例を線形制約下での線形目的関数の最適化という立場から取り上げ，このアルゴリズムを適用する手順について述べている．

図１にその例を示す．ＬＰコントローラーの部分にこのアルゴリズムが存在し，その周辺にコストデータ，資源制約データ，制約式データ等のセンサーを配置してプロセス制御を行う．

この図式でリアルタイム制御も可能であることを示す．即ち従来のＬＰ適用がこの方法ですべてカバーされ，更にリアルタイム制御が可能になることを示唆している．

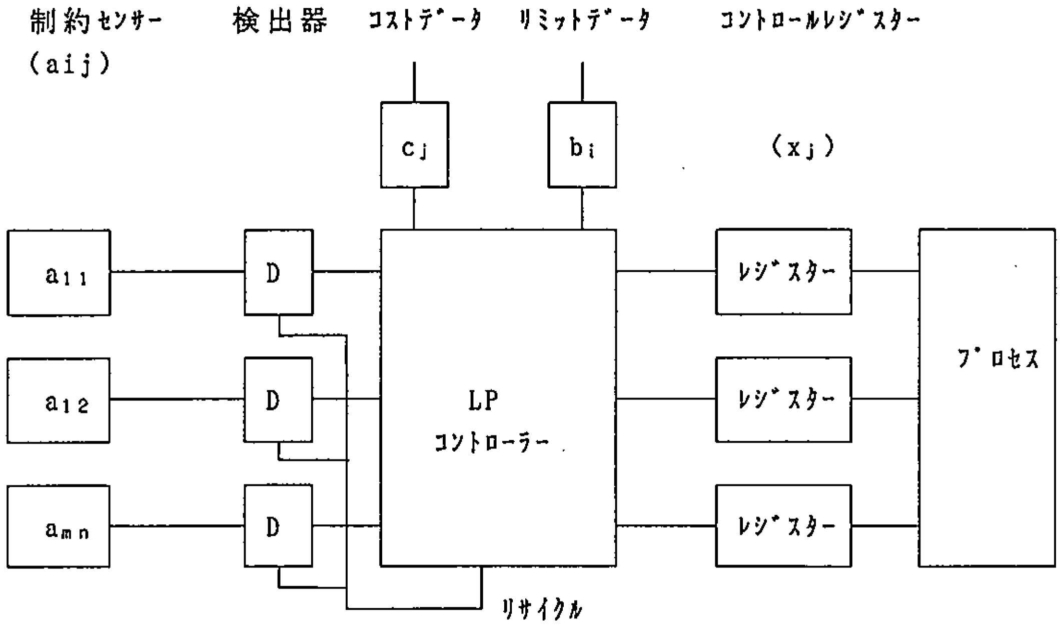

図１．ＬＰによるコントロールシステム

d.　この特許の適用対象を，現実的な技術や工業のシステムを最適化する場面に限定している．

e.　学術的な目的での利用 ― 非技術的，非工業的な利用―はこの発明の特許の対象外である．

2.　特許の数学的な内容

この節では Karmarkar 特許の具体的な内容について紹介する．いずれも特許のドキュメントに書かれていることであるが，紙面の都合上一部を省略した．

2．1 Karmarkar 特許

a.　Karmarkar による内点法の一般的な手順

Step 1.　ＬＰモデルの作成

$$\min\ c^T x$$
$$\text{s.t.}\ Ax=b$$
$$l \leqq x \leqq u$$

ここに A は (m,n) 行列，l，u はそれぞれ変数 x の下限，上限を与えるm-ベクトル．

Step 2.　$l < x^0 < u$ ，$Ax^0=b$ を満たす x^0 を選ぶ．

$k=0$ とする．

Step 3.　x^kをセット

Step 4.　スケーリングの対角行列Ｄを用いて x^kをセンター化する．

Step 5.　センター化された反復点で最急降下方向 p を求める．

$$p = -D\{I-(AD)^T(AD^2A^T)^{-1}AD\}Dc$$

Step 6.　$x^{k+1} = x^k + \alpha p$

とする．

Step 7.　収束テスト：

$$| c^T x^k - c^T x^{k+1} | \leqq 2^{-q} | c^T x^k |$$

もし成立すればStep 8へ

さもなければ

$k=k+1$

として Step 3 へ．

Step 8.　x^Kを丸めて最適解とする．

（注1）Step 7 の停止条件は，主問題と双対問題の 双対ギャップを考察することによって代えることもできる．その他従来から用いられている方法によってもよい．

（注2）Step 4 での D の選び方として

$$D_{ii}=\min\{1, x_i^k - l_i, u_i - x_i^k\}$$

がある．ただし D のある成分が前の値とあまり変わりなければ D のある成分を数反復間同一値にしてもよい．また x が限界値からかなり離れている場合もそうである．

（注3）　　$p = -D\{I-(AD)^T(AD^2A^T)^{-1}AD\}Dc$

の計算で最も困難な部分は逆行列と関係した部分であるが，その計算には近似方法である incremental change の手法を用いることもできる．

（注4） Step 6.　$x^{k+1} = x^k + \alpha p$

において $\alpha = \beta \min\{\min\{(x_i^k - l_i)/p_i \mid p_i < 0\}, \min\{(u_i - x_i^k)/p_i \mid p_i > 0\}\}$

$0 < \beta < 1$

とする．

（注5）初期の内点 x^0 を求めるためには Karmarkar の原論文[5]で述べた方法などを用いることができる．

b．　射影変換を用いる方法

この方法はａ．で述べた一般的な方法の一つの実現方法として述べられている．標準形ＬＰに対して文献[5]の方法を用いてそれと等価ないわゆるKarmarkarの標準形ＬＰをつくる．そして射影変換というセンター化を用いて，変換され空間で変換された目的関数の最急降下方向を，変換された制約の null space 上に直交投影する．この方法によってポテンシャル関数が一定量だけ減少する．そのことにより多項式性が示されたことになる．詳細は[5]にあるのでここでは省略する．

２．２　Vanderbei 特許

Vanderbei の方法はいわゆる アファインスケーリング法であり，次の４つからなる．

ａ．　主アファイン法

〈LP〉　$\min c^T x$　　(1)

$\text{s.t.} \quad Ax = b, x \geqq 0$

Aは(m, n)行列とする．

主アファイン法の１反復は次の通りである．

〈LP〉の内点可能解 x (>0) をもとに次の双対ベクトル w と方向 z を作る．

$$w = (AD_x^2A^T)^{-1}AD_x^2c \tag{2}$$

$$z = D_x^2(c - A^T w) \tag{3}$$

ここに $D_x = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_n)$である．

相補スラック性指数γと双対可能性指数δを次により計算する．

$$\gamma = \max[z_i/x_i] \tag{4}$$

$$\delta = -\min[z_i/x_i^2] \tag{5}$$

停止条件

$$\gamma + M\delta < \varepsilon(|cTx| + 1)/n \quad (\text{ただし}\ M = \max x_i) \tag{6}$$

をテストしもし満足してなければ，

$$x \leftarrow x - (\alpha/\gamma)z \tag{7}$$

とする．ここに　αは　$0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．

b．　自由変数を含むモデル

〈LP〉　$\min c_A^T x + c_F^T y$　　(10)

$\text{s.t.} \quad Ax + Fy = b$

$l \leqq x \leqq u: \quad y \text{ free}$

〈LP〉の内点可能解 x $(l < x < u)$ をもとに次のベクトルを計算する．

$$z_F = (F^T BF)^{-1}(c_F - F^T BAD_x^2 c_A) \tag{11}$$

$$w = BAD_x^2 c_A + BFz_F \tag{12}$$

$$z_A = D_x{}^2(c_A - A^T w) \tag{13}$$

ここに $B=(AD_x{}^2A^T)^{-1}$

次に，相補スラック性指数 γ と双対可能性指数 δ を計算する．

$$\gamma = \max[(z_A)_i/((x_i - l_i) \cup -(z_A)_i/(u_i - x_i)] \tag{14}$$

$$\delta = -\min[(z_A)_i/(x_i - l_i)^2 \cap -(z_A)_i/(u_i - x_i)^2] \tag{15}$$

γ と δ をもとに次の停止条件をテストする．

$$\gamma + M\delta < ((\varepsilon/n)(|c_A{}^T x + c_F{}^T y| + 1) \tag{16}$$

ここに

$$M = \max\ (x_i - l_i) \cap (u_i - x_i) \tag{17}$$

(16)のテストが満たされないとき次の新しい点に移る．

$$x \leftarrow x - (\alpha/\gamma)z_A \tag{18}$$

$$y \leftarrow y - (\alpha/\gamma)z_F \tag{19}$$

c.　Phase I モデル

自由変数を含むモデルを　Phase I 問題に用いたものである．

$$\min\ y \tag{20}$$

$$\text{s.t.}\quad Ax + \rho y = b$$

$$l \leqq x \leqq u,\quad y{:}\text{free}$$

ここに　$\rho = b - A\xi$，$l < \xi < u$　とする．

$(x=\xi, y=1)$ は (20) の内点可能解であるからこの点から出発して内点可能解 $(x, y=0)$ を得ればそれが　Phase II の内点可能解となる．

(20)に対する方向 z は

$$\begin{pmatrix} -D_\xi{}^2 A^T B \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

に比例する．(14)，(15)を用いて γ と δ を計算し，停止条件をテストする．このときもし

$\gamma < 1$ ならば，　one step で y は 0 になる．

実際，

$$x \leftarrow \xi - z \tag{22}$$

とすればよい．

もし　$\gamma \geqq 1$ ならば

$$\xi \leftarrow \xi - (\alpha/\gamma)z \tag{23}$$

とし，(21) に戻る．

各ステップにおいて ρ を再計算する．

d.　双対アファイン法

$$\langle LP\rangle \quad \max\ b^T w \tag{24}$$

$$\text{s.t.}\quad A^T w \leqq c$$

$$w{:}\ \text{free}$$

$$\langle LP'\rangle \quad \max\ b^T w \tag{25}$$

$$\text{s.t.}\quad A^T w + v = c$$

$$w{:}\ \text{free},\ v \geqq 0$$

自由変数モデルをこの問題に適用することにより次のアルゴリズムを得る.
(25)の内点可能解（w,v）(v)0）をもとに，次の諸量を計算する.

$$z_w=-((AD_v^{-2}A^T)^{-1}b \quad (26)$$

$$x=-D_v^{-2}A^Tz_w \quad (27)$$

$$z_v=D_v^2x=-A^Tz_w \quad (28)$$

$$\gamma = \max [(z_v)_i/v_i] \quad (29)$$

$$\delta = - \min [(z_v)_i/v_i^2] \quad (30)$$

$$M=\max v_i \quad (31)$$

もし

$$\gamma+M\delta \langle (\varepsilon/n)(|b^Tw|+1) \quad (32)$$

ならば停止.
さもなくば,

$$w \leftarrow w-(\alpha/\gamma)z_w \quad (33)$$

$$v \leftarrow v-(\alpha/\gamma)z_v \quad (34)$$

として（26）に戻る.

2．3　Bayer 特許

この特許は内点法の解の軌道を巾級数展開により近似して行く方法に関連している. 射影スケーリングとアファインスケーリングの両方を対象としているが，ここでは後者について紹介する.

〈LP〉　max b^Ty (35)

s.t.　$A^Ty \leqq c$

ここに　Aは（m,n）行列とする.

〈LP'〉　max b^Ty (36)

s.t.

$A^Ty + w = c$

$w \geqq 0$

ここに w は m-ベクトルである.

アファイン軌道の微分方程式は

$$dy(t)/dt=\rho(t)[AW^{-2}A^T]^{-1}b, \qquad y(0)=y_0 \quad (37)$$

である．ここに

$$w=w(t:\rho)=c-A^Ty(t:\rho) \quad (38)$$

$$W=W(t:\rho)=\mathrm{diag}(w) \quad (39)$$

であり,

$$\rho(t)=\Sigma_{j=0}^m \ a_jt^j \quad (40)$$

は A 軌道を表現するための巾級数展開である.
次に述べるのは $\rho(t)$の一つの決め方である.

現在の可能点 y_k から出発するものとし，その点を y^* と記し

$$w^* = c - A^Ty^* \quad (41)$$

とする.

巾級数展開を

$$w(t:\rho(t))=(w_1(t:\rho(t)),...,w_m(t:\rho(t)))$$

が

$$w_{i0}(t:\rho(t))=(w^*)_{i0}-(w^*)_{i0}t \tag{42}$$

を満たすように選ぶ．ここに i_0 は目的関数の増加にもっとも強く寄与する変数の番号である．即ち

$$\delta_i=(w^*)_i/[(A(W^*)^{-2}A^T)^{-1}b]_i \tag{43}$$

を　$\delta_i>0$ である i につき最小にする添字を指す．ここに

$$W^* = \mathrm{diag}(\ w^*\ )$$

である．

このような決め方をした理由は次の通り．

$y(t:\rho)$ に対する巾級数展開の一次近似では t = 1 で 非可能解になるが，ステップサイズを t = 1 のオーダーにはしたい．(43) のテストは $w(t:\rho)$ への一次近似に対して レイシオテストを行ったものである．

上のように定式化した上で，次のような反復計算を用いて巾級数展開を行う．

$$y(t:\rho)=\Sigma_{k=0}{}^{m}v_k t^k \tag{44}$$

及び

$$w(t:\rho)=\Sigma_{k=0}{}^{m}w_k t^k \tag{45}$$

初期値は

$$v_0=y^* \tag{46}$$

$$w_0=c-A^Tv_0 \tag{47}$$

である．

ここで　$\{X_k\}$ を

$$X(t)=W^{-2}(t)=\Sigma_{k=0}{}^{m}X_k t^k \tag{48}$$

により定める．X_k は対角行列でその初期値は次の通り．

$$W_0 = \mathrm{diag}(\ w_0\ )$$

$$X_0 = W_0{}^{-2} \tag{49}$$

また行列　$\{M_k\}$ を

$$M(t) = AW(t)^{-2}A^T = \Sigma_{k=0}{}^{m}M_k t^k \tag{50}$$

により定める．

$$M_k = AX_kA^T \tag{51}$$

である．

次に

$$\beta_0 = (\ M_0b\ )_{i0} \tag{52}$$

を計算し，

$$\alpha_0 = (\ \beta_0\ )^{-1}w_{i0} \tag{53}$$

とする．ここに w_{i0} は w_0 の i_0 成分である．

最後に

$$v_1 = \alpha_0M_0{}^{-1}b \tag{54}$$

とする．

以上の初期化の下で反復過程に入る．即ち最適点に至るパスを記述する巾級数の係数を決める過程である．(j+1)番目のステップの初めにおいては　v_0, v_1, … , v_jの値と w_i, X_i, M_i, α_i　($0 < i \leqq j-1$)の値は既知である．w_j, X_j, M_j, α_j,及び v_{j+1} を次のように計算する．

$w_j = c - A^T v_j$ (55)

$W_j = \mathrm{diag}(w_j)$

$X_j = -W_0^{-2}[\Sigma_{k=0}^{j-1} X_k (\Sigma_{l=0}^{j-k} W_l W_{j-k-l})]$

$M_j = A X_j A^T$

$\bar{v}_{j+1} = (-1/(j+1)) M_0^{-1} [\Sigma_{k=1}^{j} (j+1-k) M_k v_{j+1-k}]$ (56)

$\alpha_j = -(j+1)\beta_0^{-1}(\bar{v}_{j+1})_{l0}$ (57)

により決める．そうして

$v_{j+1} = \bar{v}_{j+1} + (\alpha_j/(j+1)) M_0^{-1} b$ (58)

を計算して反復を終わる．

この反復過程は巾級数の必要な項数までくり返される．

こうして巾級数展開

$y(t) = \Sigma_{k=0}^{m} v_k t^k$ (59)

の係数が得られたので，今度はステップサイズ t を決める必要がある．そのため t=0.95,0.9,.....,という具合いに調べて行き w(t) が正になる最大の t の値を求めて次の反復点を y(t) とする．

3． コメント

3つの特許のうち Karmarkar 特許と Vanderbei 特許はＬＰ解法の基本的な方法論を対象としており，それに対して Bayer 特許は両方の方法に対して有用な補助手段を提供するものである．

現時点での数理計画関係者の数値実験での評価としてアファインスケーリング法（ Vanderbei 特許）がすぐれたものとして認められている．射影スケーリング法にくらべて現実問題に適用し易いことや，幾何学的イメージが明確なこと，implementation が易しいことなどがその理由であるが，数値実験の結果も射影スケーリング法より優れていることを示している．

しかし， Vanderbei 特許には次のような問題点がある．

(1) アファインスケーリング法の収束性

"数学的方法論" のアルゴリズムにおいて収束性は重要な関心事である．この場合，反復点が本当に最適点に収束することが示されていなければならない．

ところが，この特許が申請された時点では 収束性に関しては Barnes [2]の研究が最良のものであった．それは元の問題とその双対問題の両方が非退化の場合，アファインスケーリング法は最適点に収束するという内容である．(この文献は Vanderbei 特許の参考文献に入っている．)

実は，ソビエトの数学者 I.I. Dikin が 1967 年にアファインスケーリング法を提案し([3])，1974 年に主問題が非退化という仮定の下でその収束性を証明していた([4])（証明には若干の手落ちがあったが）．しかしこのことは 1988 年 1 月に本人からの通知ではじめて西側のコミュニテイに知らされた．したがってこの特許の申請時には未知であったと判定される．しかしながら現実のＬＰ問題は主問題，双対問題が共に退化している場合が多いので， Vanderbei 特許の収束性は少なくとも申請時においては不明であったと言わねばならない．（その後の研究一例えば Adler-Monteiro [1]によって アファイン法の連続トラジェクトリは主・双対退化の場合でも収束することが示され，Ye [7]によって多項式性を有するアファイン法の改良版が

提案された．また，Tsuchiya [6] は双対非退化のもとでの双対アファイン法の収束性を示した．しかし，この問題は実質的には Ye [7] の方法によって収束性と多項式性が解決されたとみるべきであろう）．このことは，法廷において，この特許を巡って係争が起こったような場合，相手が収束の確実な方法一それがたとえ Vanderbei 特許の一種であったとしても一を採用していたならば AT&T 側に不利に働くであろう．

(2) Dikin の方法の存在

すでに記したように Vanderbei 特許よりも 20 年近くも前にこの方法の基本的な部分が Dikin によって提案されていたという事実をどう見るか．

4. トレンド

ＮＹタイムズの 1989 年 2 月 15 日号で Edmund L. Andrews が "Equations Patented : Some See a Danger" という題で Karmarkar 特許に関連した記事を書いている．それを要約すれば次のような内容となる．

(1) 1939 年にアメリカ最高裁は科学的な真実（例えば重力の法則）またはその数学的な表現は特許の対象とならないとした．

(2) 1972 年に，コンピュータに用いられる 10 進数→2 進数の変換アルゴリズムに特許を与えることを拒否した．その理由は「アルゴリズムや数学の公式は自然法則の一種で特許の対象とはならない．」

(3) 1980 年に最高裁は遺伝子工学によって変更された生きているバクテリアは特許の対象になるという決定を下した．その理由は，「そのようなバクテリアは以前には自然界に存在しなかったから」とした．その後，遺伝子工学で改造されたマウスにも特許を認めた．

(4) 1981 年に米最高裁は数学的表現についての立場を緩和した．即ち「単なるアルゴリズムの存在だけでも発明を特許の対象としないことはない」．「自然法則や数学公式を既知の構造やプロセスに適用した場合，十分特許の対象となり得る」

(5) 1982 年に Federal Court of Custom と Patent Appeals は「アルゴリズムはそれが発明の物理的な要素やプロセスステップに対してどのような形であれ適用できる限り特許を保護される」とした．

(6) 今や米特許庁はアルゴリズムがその主体をなし，その応用はごく一般的に述べているにすぎないような発明に対しても特許を与えるに至った．

(7) 上記のトレンドに沿って最近特許が成立したアルゴリズムには本件以外に以下のようなものがある．

* Computer and Method for Solving the Discrete Bracewell Transformation (R. N. Bracewell, Stanford Univ. 1987)
* Discrete Cosine Transform (P. Duhamel, France. 1989)
* Squared Radix Discrete Fourier Transform (TRW, 1988)
* System Incorporating an Error-Tolerant Picture Compression Algorithm (Eastman Kodak, 1989)

5. リアクション

以下は内外の関係者の数学特許や Karmarkar 特許に対する反響の要約である.

5. 1 反対

a. 特許の承認が降りるまで数学者達はアイデアを交換することをやめるであろう. そのために学問の進歩が著しく阻害される.

b. 数学がどこまで進歩するか, どんな新しいアルゴリズムが出現するか予測もつかない. しかしそれは先人の仕事にドラマチックな形で関わっているにちがいない. 真空のなかで仕事はなされるものではない. ある発明へ(直接, 間接に)寄与した人をすべて特許に網羅する必要があるとしたら, それがまた将来の係争の種になるだろう.

c. このような傾向は幾世紀にもわたって続いてきた数学者のよき慣習—他人の得た成果を自由に使える—を変更させることになるだろう.

d. もし数学を自然界に存在する構造の理論と見るならば, どのような定理, 定義, アルゴリズムをも特許の対象とすることはできない. しかしながら, オペレーションズリサーチや数理計画のモデリングとなれば, それは工学におけるものと非常に似たものに見えてくる. ある特定の現実的なニーズに応じてアドホックにモデルを発明したとするならばそれは工学上の発明と強い類似性をもつ. その場合, 特許が議論され得る領域がある. この点, 数学者, コンピュータ科学者, 数理計画界の人々はよく議論して一般に受け入れ得る意見をまとめる必要がある.

私個人としては特許に反対である. それは科学の進歩に有害であるから. (M. Grötschel)

e. 計算のアルゴリズムはどのような組織にも所有権を与えてはならない. それは研究を妨害し進歩をさまたげる. しかし, あるアルゴリズムに基づいたソフトウェアパッケージは, それが個人的に作られたものならば版権をもってもよい. ただし公共的な資金で作られたものは, 公共に帰属すべきである.

f. 金儲けに反対しているわけではない. しかし, 他の人が追試できないようにわざと情報を公開しないというやり方は科学の世界では許されないことである. そのような態度はマーケッテングの世界に属する. この原則は科学上の発表にも通用する. もし発表者が計算結果を実証するに十分なディテールを公表することを拒むならば, その発表は宣伝にすぎない. そのような発表は展示品と同じグループに入れるべきである. (MP Society, COAL Newsletter, 18(1989)より)

5. 2 賛成

a. ニュートンが重力の法則を発見したがそれは自然法則であって特許の対象とはならない. しかし, 誰れかがその法則を利用してロケットを発明したとき, どうして彼が特許を取ってはいけないのか.

b. 6カ月かかって1万行のプログラムを書いたのだ. それが自然の産物などとどうして言えるのか. 産業界では知的所有権の保護を主張している. 特許の保護なくしては開発の困難な仕事に立ち向かうインセンチブは失われるであろう. (FFTの新しいアルゴリズムで特許をとった R. Bracewell)

c. アルゴリズムの開発には人材とコンピュータのコストがかかっている. 企業としてはその投資を回収する必要がある. 他社に結果だけを真似されては困る. 特

許はそのためだ．状況は単なる数学公式の場合と異なる．

d．　これまで特許がハードウェア中心に認められてきたことはハード上位という技術の歴史を反映している．しかし現代の技術はソフトウェアに重点が移りつつある．また経済のソフト化という現象が先進国ではみられるようにソフトの重要性は今後益々強まるに違いない．ソフトの中心はアルゴリズムであり優れたアルゴリズムに特許が認められるのは当然のことである．ソフトウェアの著作権の法的保護とともに特許化も必要である．科学の純粋性などというキレイごとでは済まされないほどソフトウェアやアルゴリズムは現代の産業，技術，経済と深い関わりをもつにいたっている．旧い頭をもった数学者達の通念はもはや通用しない．この問題を巡ってトラブルが発生することは十分考えられる．いつの時代でも新しい潮流が発生するときは軋轢があるものだ．しかし時代の流れを押さえることはできないだろう．

謝辞

本稿をまとめるに当り東京工業大学　今野浩教授，日本ユニシス（株）森本晧夫氏から資料の提供をうけました．記して謝意を表します．

参考文献

[1] Adler,I. and Monteiro,R.D.C., "Limiting behavior of the affine scaling continuous trajectories for linear programming," Technical Report, Operations Research Center,University of California,Berkeley,CA 94720, USA,1988.

[2] Barnes,E.R., "A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems," Mathematical Programming,36 174-182,1986.

[3] Dikin,I.I., "Iterative solution of problems of linear and quadratic programming," Soviet Mathematics Doklady,8 674-765,1967.

[4] Dikin,I.I., "On a speed of an iterative process," Upravlyaemye Sistemi, 12 54-60,1974.

[5] Karmarkar,N.K., "A new polynomial-time algorithm for linear programming," Combinatorica,4 373-395,1984.

[6] Tsuchiya,T., "Global convergence property of the affine scaling methods for primal degenerate linear programming problems," Research Memorandom No.367,The Institute of Statistical Mathematics,Tokyo,Japan,1989.

[7] Ye,Y., "Practical approaches to the potential function method for linear programming," Manuscript,Department of Management Sciences, The University of Iowa,Iowa City,Iowa 52242,USA,1988.