92-B-3

ＤＥＡのモデルをめぐって

刀根　薫

１９９２年６月５日

ＤＥＡのモデルをめぐって*

刀根　薫[†]

1　はじめに

ＤＥＡ（Data Envelopment Analysis）は Charnes and Cooper 等によって創始された，企業体の相対的な効率性を比率尺度に基づいて測定する手法である．十数年に及ぶ手法の開発と応用を経て，世界の各地で広く用いられている．（Seiford [8] にＤＥＡに関する網羅的な文献リストがある．）多くのオリジナルな理論がそうであるようにＤＥＡも目的や用途に応じて様々なバリエーションを生み出している．それはＤＥＡモデル群と言えるであろう．この小論では，先ずそれらのモデル群を概観し，それぞれの特徴を示す．また，利益の効率性を対象とする新しいモデルを提案するとともに，各モデルを使用する際に留意すべき事項についても考察する．ＤＥＡのような発展中の手法に関しては，現時点での手法や適用法のサーベイは常に必要であると思いこの小論をまとめた次第である．

先ず，この論文で用いる記号と基本的なモデルについて説明する．今，n コのＤＭＵ（Decision Making Unit）があり，各ＤＭＵには共通した入力（投入）群と出力（産出）群があるとする．入力群の個数を m，出力群の個数を s とし，ＤＭＵ k の入力値を $x_{jk}(j=1,\ldots,m)$，出力値を $y_{jk}(j=1,\ldots,s)$ とする．ベクトル $x_k=(x_{1k},\ldots,x_{mk})^T$, $y_k=(y_{1k},\ldots,y_{sk})^T$ とし，更に，

$$X = [x_1,\ldots,x_n] \in R^{m\times n} \quad (1)$$

$$Y = [y_1,\ldots,y_n] \in R^{s\times n} \quad (2)$$

とする．これらの値は一般に正値であり，ある出力を産出するための入力に関しては値の小さいもの程好ましく，ある入力による出力に関しては大きいもの程好ましい状態にあるとする．X と Y はＤＭＵ集合のデータである．こ

*On DEA Modeling

[†]Kaoru Tone　とね　かおる　　埼玉大学大学院政策科学研究科　〒338 浦和市下大久保 255

の集合は場合によって，増減することもあり，それによって各ＤＭＵの効率性は変化する．即ち，ここでの効率性は相対的なものである．またこれらのＤＭＵはある母集団からのサンプリングと見ることもできる．次に，ＤＭＵのデータセット (X, Y) をもとに，生産可能集合 (x, y) を次の制約を満たす値の集合として定義する．

$$
\begin{aligned}
x &\geq X\lambda && (3)\\
y &\leq Y\lambda && (4)\\
\lambda &\geq 0 && (5)\\
L &\leq e^T\lambda \leq U. && (6)
\end{aligned}
$$

ここに，$x \in R^m, y \in R^s, \lambda \in R^n, e^T = (1, ..., 1)$ であり，L と U は λ の要素の和に対する下，上限である．一般に，$\lambda \geq 0$ に対して，$(X\lambda, Y\lambda)$ の集合は凸錐を構成する．(3) は x がある λ に対してその凸錐点の x 座標より大きい値を取り，(4) は y が　凸錐点の y 座標より小さい値を取ることを意味する．即ち，ＤＭＵの入力のある非負結合より大きい入力と，対応する非負結合の出力より小さい出力を持つ活動は可能であるとするのが (3), (4), (5) である．それに対して (6) は λ の取り得る範囲を限定したことになる．その意味については後述の各モデルで説明する．

(3), (4), (5), (6) はＤＥＡを特徴づける性質であり，当該の問題の内包する生産関数を規定するものである．したがって，他のタイプの生産関数に対しては，異なる形の (x, y) が対応する可能性がある．例えば，非線形あるいは離散的な集合も有り得る．

2　CCR(Charnes-Cooper-Rhodes) モデル

このモデル [5] は最も基本的なものであり，生産関数としては，(6) において $L = 0$, $U = \infty$ を仮定している．即ち (6) を除去した場合に当たる．各ＤＭＵ（ここでは代表的に (x_0, y_0) とする）につき次のＬＰのどれかを解く．

(I) 入力最小化モデル

$$
\begin{aligned}
&\min \theta && (7)\\
st.\ \theta x_0 &\geq X\lambda && (8)\\
y_0 &\leq Y\lambda && (9)\\
\lambda &\geq 0. && (10)
\end{aligned}
$$

(O) 出力最大化モデル

$$
\begin{aligned}
& \max\ \eta && (11)\\
st.\ x_0 &\geq X\mu && (12)\\
\eta y_0 &\leq Y\mu && (13)\\
\mu &\geq 0. && (14)
\end{aligned}
$$

これらのＬＰの最適解を (θ^*, λ^*), (η^*, μ^*) とするとき

$$\theta^* \eta^* = 1, \quad \lambda^* = \theta^* \mu^* \tag{15}$$

の関係がある．
上の (I) の解において $\theta^* = 1$ であり，かつすべての最適な λ^* に対して

$$
\begin{aligned}
\tau^* &\equiv x_0 - X\lambda^* = 0 && (16)\\
\nu^* &\equiv Y\lambda^* - y_0 = 0 && (17)
\end{aligned}
$$

が成立するならば，このＤＭＵ$_0$ は効率的であるという．同じことであるがそのとき　$\eta^* = 1$ であり，かつすべての最適な μ^* に対して

$$
\begin{aligned}
\phi^* &\equiv x_0 - X\mu^* = 0 && (18)\\
\psi^* &\equiv Y\mu^* - y_0 = 0 && (19)
\end{aligned}
$$

が成立する．それ以外の場合はＤＭＵ$_0$ は非効率的であると判定される．上の τ, ν, ϕ, ψ は，そのＤＭＵの入力や出力の余剰や不足を示しており，それらが正のものが１つでもあれば非効率的である．
各ＤＭＵについて (I) か (O) のどれかを解いて，θ^* を求めると，θ^* は

$$0 \leq \theta^* \leq 1 \tag{20}$$

の間にあり，その大きさによって効率値を比較する．ただし $\theta^* = 1$ であっても非効率ということはあり得るので注意する必要がある．

(I) の双対問題とし $u \in R^s$, $v \in R^m$ を変数とする次のＬＰを得る．

$$
\begin{aligned}
(ID) \quad & \max\ \xi = u^T y_0 && (21)\\
st.\ v^T x_0 &= 1 && (22)\\
u^T Y &\leq v^T X && (23)\\
u,\ v &\geq 0. && (24)
\end{aligned}
$$

これは次の分数計画と同値である．

$$
\begin{aligned}
(IF) \quad \max\ \xi = \frac{u^T y_0}{v^T x_0} & & & \quad (25)\\
st.\ \frac{u^T y_k}{v^T x_k} & \leq & 1\ \ (\forall k) & \quad (26)\\
u,\ v & \geq & 0. & \quad (27)
\end{aligned}
$$

ＣＣＲモデルはもともとこの分数計画からスタートしている．(26) の意味は，入力値の加重和と，出力値の加重和の比をすべてのＤＭＵについて１以下に押さえることであり，その上で，当該のDMU_0 についての比 (25) を最大化することを目指す．ＬＰ (ID)　として解く場合，(24) の代わりに $u \geq \epsilon e$, $v \geq \epsilon e$ (ϵ は無限小正数) としておけば，その最適解 (ξ^*, u^*, v^*) において $\xi^* = 1$ ならばそのＤＭＵは効率的，$\xi^* < 1$ ならば非効率的と判定できる．計算法としては，一般に　$m + s < n$ であるから，(I) を解くほうがよい．(制約式の個数が小さいから.) そのとき，次のように変形して解けば $z^* = 1$ のときＤＭU_0 は効率的であり，$z^* < 1$ のとき非効率的であると判定できる．ＬＰの計算はデータのスケールに対して敏感であるから，ＬＰ計算の前にスケーリングをすることをすすめる．

$$
\begin{aligned}
\min\ \ z &= \theta - \epsilon(e^T s^+ + e^T s^-) & (28)\\
st.\ \ \theta x_0 - s^+ &= X\lambda & (29)\\
y_0 + s^- &= Y\lambda & (30)\\
\lambda,\ s^+,\ s^- &\geq 0. & (31)
\end{aligned}
$$

多入力，多出力のシステムの効率を相対評価するためにそれぞれの加重和を取り，あたかも１入力，１出力の場合のようにその比率尺度で評価することはよく行われることであるが，その加重値を，当該のＤＭＵにとって最も有利になるように決めるというのがＣＣＲモデルの特徴である．

図1挿入

3　BCC(Banker-Charnes-Cooper) モデル

ＣＣＲモデルでは生産可能集合が凸錐をなしていた．即ち，スケールに対して特別な配慮をしていない．それに対してＢＣＣモデル [2] では生産可能集合をもっと限定した領域に取る．具体的には (6) において $L = U = 1$　と

する．よって，

$$e^T\lambda = 1 \tag{32}$$

となる．このことにより，生産可能集合は現在のＤＭＵ集合の凸包を基本とし，その凸包の点より，大なる入力と小なる出力をもつ点から構成されると想定する．したがって，このモデルに基づく効率性の測定は次のＬＰによってなされる．

$$\min \theta \tag{33}$$

$$st.\ \theta x_0 \geq X\lambda \tag{34}$$

$$y_0 \leq Y\lambda \tag{35}$$

$$e^T\lambda = 1 \tag{36}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{37}$$

ＢＣＣモデルによる効率値は一般にＣＣＲモデルのものより大きくなる．極端な場合，ＣＣＲで効率０と判定されたものが，ＢＣＣでは１となることもあるのでモデルの妥当性について十分慎重でなければならない．また，仮に２つのＤＭＵがあって，一方が他方の入出力値を２倍にしたような場合，ＣＣＲモデルでは２つのＤＭＵの効率性は同一であるが，ＢＣＣのそれは一般的に異なる．

上記の入力最小化ＬＰに対して，出力最大化ＬＰをＣＣＲモデルと同じように考えることができるが，両方の最適解に対して (15) のような関係はＢＣＣモデルでは成立しない．

図２挿入

ＢＣＣの変種として２つのモデルを取り上げる．

（１）上方向にのみスケール効果を考慮する場合

$L=0$, $U=1$　とする．即ち，$e^T\lambda \leq 1$．このとき，上方向にたいしては凸包の制約が効くが，下方向に対しては縮小が自由である．

図３挿入

（２）下方向にのみスケール効果を考慮する場合

$L=1$, $U=\infty$ とする．即ち，$e^T\lambda \geq 1$．このとき，下方向にたいしては凸包の制約が効くが，上方向に対しては拡大が自由である．

図4挿入

4　領域限定法

ＣＣＲモデルの双対問題における変数 u, v はそれぞれ入力及び出力へのウェイトと解釈することができた．ＣＣＲモデルにおいてはこのウェイトの相対的な大きさの比についてはなんら考慮していない．もっぱら，当該ＤＭＵ$_0$ について 加重比 $u^T y_0 / v^T x_0$ を最大化するように u, v を決めた．しかし，現実問題として項目間のウェイトにあまり大きい違いがあることは好ましいことではない．極端に小さいウェイトの項目は初めから存在しなかったと同じになるからである．そこでウェイトの相対的な大きさに制限をつけることが提案されている．例えば，入力の第１項目と第２項目のウェイトの間に

$$l_{12} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq u_{12} \tag{38}$$

といった制約を必要に応じて設定する．これは双対変数の存在領域を制限するので領域限定法という．この上下限は各項目の重要さに応じて設定しなければならないし，各項目の単位も考慮しなければならない．これらの制約が加われば，当然のことながら，効率値は一般的に低下する．ＣＣＲモデルにくらべてより説得性のある結果が得られる．しかしこの方法の短所は上下限値の妥当性にある．多くの場合，最適解においては上下限のどちらかにウェイトの比が達するからである．Thompson et al. [11] に領域限定法の優れた適用例がある．

5　変数／ＤＭＵ集合の分割

入力変数や出力変数の中には，その属性として見るとき，ＤＭＵにとってある程度制御可能なものと，ＤＭＵが自由に決定できないものが入っていることが多い．例えば，入力としてある地域のセールスマン数と人口があるとき，前者は制御可能であるが，後者は不能である．そこで変数の項目を分割し前者を制御可能変数，後者を制御不能変数と呼ぶことにする．それぞれ X^C, X^N, Y^C, Y^N と表す．この分割により，生産可能集合は，X^C, Y^C に関する部分はこれまで通り，

$$x^C \geq X^C \lambda \tag{39}$$
$$y^C \leq Y^C \lambda \tag{40}$$

であるが，制御不能変数に関しては

$$x^N = X^N \lambda \tag{41}$$
$$y^N = Y^N \lambda \tag{42}$$

といった取扱いが必要となる．上の式は制御不能変数がＤＭＵの非負結合と等式で関係付けられることを前提としているが，場合によっては，不等式条件やある巾に入るといった制約になることも考えられる．制約不能の度合いに応じて個別にそれらの関係を表現する必要がある．上記の変数の分割をもとに，DMU_0 の効率性を判定するＬＰは次の通りである．

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta && (43)\\
st. \quad \theta x_0^C & \geq X^C \lambda && (44)\\
y_0^C & \leq Y^C \lambda && (45)\\
x_0^N & = X^N \lambda && (46)\\
y_0^N & = Y^N \lambda && (47)\\
L & \leq e^T \lambda \leq U && (48)\\
\lambda & \geq 0. && (49)
\end{aligned}
$$

図５挿入

図5において２入力，１出力（出力値=1）のシステムがあるとき，ＤＭＵ B の普通に測った効率は OP/OB であるが，制御不能変数を考慮した場合，効率は QR/QB になり効率は一般に低下する．

上のモデルでは，変数を分離したが，場合によってはＤＭＵ集合を分割した方が良いこともある．例えば，入力変数として人口を取ったとき，同じ位の人口のＤＭＵ（或いは自分と同等か自分以下の人口のＤＭＵ）だけを比較の対象とした方がより説得的な結果が得られることがある．

6　異なる入力システムの下での効率性分析

これまで生産可能集合は凸集合をなすと仮定した．例えば，２つのＤＭＵ (x_1, y_1)，(x_2, y_2) があるとき，この２点を結ぶ線分上の点はすべて生産可能集合に属するとした．しかし，この仮定が満たされないような場合がある．例えば，ＤＭＵ (x_1, y_1) はある装置を用いており，ＤＭＵ (x_2, y_2) は別の装置を用いているので，その中間の点は考えられないといったケースである．

今，考察しているＤＭＵ集合が入力に関して２つの異なるシステムに属しており，一方を A，他方を B とする．(ここでは，説明の都合上２つのシステムとしたが一般にいくつのシステムがあっても以下の議論は成立する.)
入力を X_A，X_B に分割し，出力を Y_A，Y_B に分割する．A，B の各グループ

の"中"では凸の生産可能性が成立するが，A，B の"間"では成立しないものとする．そのとき，生産可能集合 (x,y) は次の制約を満たす．

$$\begin{aligned} x &\geq X_A\lambda_A + X_B\lambda_B & (50) \\ y &\leq Y_A\lambda_A + Y_B\lambda_B & (51) \\ Lz_A &\leq e^T\lambda_A \leq Uz_A & (52) \\ Lz_B &\leq e^T\lambda_B \leq Uz_B & (53) \\ z_A + z_B &= 1 & (54) \\ \lambda_A &\geq 0,\ \ \lambda_B \geq 0 & (55) \\ z_A,\ z_B &= 0 \text{ or } 1. & (56) \end{aligned}$$

この状況下での，ＤＭＵ$_0$ の効率性は z_A，z_B を 0，1 変数とする次の混合整数型ＬＰによって測定される．

$$\begin{aligned} &\min\ \ \theta & (57) \\ st.\ \ \theta x_0 &\geq X_A\lambda_A + X_B\lambda_B & (58) \\ y_0 &\leq Y_A\lambda_A + Y_B\lambda_B & (59) \\ Lz_A &\leq e^T\lambda_A \leq Uz_A & (60) \\ Lz_B &\leq e^T\lambda_B \leq Uz_B & (61) \\ z_A + z_B &= 1 & (62) \\ \lambda_A &\geq 0,\ \ \lambda_B \geq 0 & (63) \\ z_A,\ z_B &= 0 \text{ or } 1. & (64) \end{aligned}$$

これらの結果から個々のＤＭＵの効率性が測定されるばかりでなく，各システムに属するＤＭＵ毎の効率値を比較することによりシステム間の効率性比較も可能となる点は興味深い．

図6挿入

２入力，１出力（ただし，すべてのＤＭＵの出力値=1）の場合の２システムの例を図６に示す．効率的フロンティアは太線のようになり必ずしも下に凸にならないことに注意する．

7　コスト効率性分析

ＤＥＡの変数として数量的なものと金額的なもののどちらを取り入れるか迷うことがある．例えば人数にするか人件費にするかとか，床面積にするか

その貸借料にするかといった問題である．ＤＥＡの一つの適用法として，特に入力変数を技術的（テクニカル）要素のみに限ることがある．上の場合で言えば人数や床面積である．そしてコスト（単価）は別の形で考慮する．即ち技術的要素とコスト要素を分離するという立場である．“生産関数”という概念からは技術的要素のみを取り上げることが本筋であるという見方もある．コスト要素はＤＭＵ毎に変化する可能性がより大きいからである．特に，国際比較の場合や時系列的な比較の場合がそうである．そこで，入力変数のデータ X はすべて技術的要素のみから成ると仮定しそのコスト単価は各ＤＭＵ毎にベクトル c_k $(k=1,\ldots,n)$ で与えられるものとする．そのとき次のような問題が発生する．「各ＤＭＵ毎に現在の出力を最小限保証した上で，より安い入力はないか？」この問題に答えるのが次のＬＰである．

$$
\begin{aligned}
(LC) \quad \min \quad w &= c_0^T x && (65)\\
st. \quad x &\geq X\lambda && (66)\\
y_0 &\leq Y\lambda && (67)\\
L &\leq e^T\lambda \leq U && (68)\\
\lambda &\geq 0. && (69)
\end{aligned}
$$

この問題の最適解を $(x^*,\ \lambda^*)$ とする．そのときＤＭＵ$_0$ のコスト効率性 E_C は

$$E_C = \frac{c_0^T x^*}{c_0^T x_0} \tag{70}$$

で測定される．$0 \leq E_C \leq 1$ であり，$E_C = 1$ のときコスト効率的である．また $E_C < 1$ のときの x_0 と x^* の差異は現在の入力値をコスト最小化の目的からどう動かせばよいかを具体的に示すものであり，改善の方向を示すものでもある．$Y\lambda^*$ は，現在の生産可能集合を前提とした場合，同じコストで出力できる筈の出力値を与える．

$$\nu^* = Y\lambda^* - y_0 (\geq 0) \tag{71}$$

とすればこれは各出力項目毎の最適値への不足分を示す．勿論，生産可能集合の内容については十分吟味しなければならない．このような解析結果が直ちに適用できるとは限らないからである．

ここで，技術的な効率性とコスト効率性の関係を図７に示す．

図７挿入

この図は２入力，１出力（ただし，すべてのＤＭＵの出力値=1）を示す．コストの等高線は点線の方向とする．原点に近い程コストは安い．コスト最小のＤＭＵ

は G である．DMU B を考察すると，このDMUの技術的効率性は OP/OB であり，コスト効率性は OS/OB である．$OS/OB = (OS/OP)(OP/OB)$ と分解することができる．ここに，OS/OP は，コスト最小という意味での最適入力ミックス（点 G）と，当該DMUに対する効率的フロンティアの点（点 P）のコストの比である．その意味から OS/OPをマネジメントの良否を示す指標と見ることもできる．OP/OB は技術的効率性であるから，この式はコスト効率性が技術的効率性とマネジメント効率性の積として表現されることを示す．このように，技術とコストの効率性を分離して議論したのは Farrell [6] の先駆的な論文が最初である．

8　利益効率性分析

コスト効率性分析の拡張として次のような状態を考慮する．入力の技術的要素を X そのコスト単価行列を C，出力の技術的要素を Y その価格行列を P とする．これらのコスト単価，価格はDMU毎に一般に異なる．そのとき，利益及び利益率を対象とする次の2つのモデルが考えられる．

8.1　利益最大化

DMU_0 の利益を出力の価格 p_0 とコスト単価 c_0 によって表すことにより，次のLPを考える．

$$\begin{array}{lrcll} (LR) \quad \max & w & = & p_0^T y - c_0^T x & \quad (72) \\ st. & x & \geq & X\lambda & \quad (73) \\ & y & \leq & Y\lambda & \quad (74) \\ & L & \leq & e^T\lambda \ \leq U & \quad (75) \\ & \lambda & \geq & 0. & \quad (76) \end{array}$$

この場合，解の発散を防止するため，上限 U を有限な値に定めておく必要がある．また，(x, y) と (x_0, y_0) を関係づける制約も現実問題として考慮しなければならない．例えば，

$$x \leq x_0, \qquad y \geq y_0 \tag{77}$$

等である．
利益効率性は，

$$E_P = \frac{p_0^T y_0 - c_0^T x_0}{p_0^T y^* - c_0^T x^*} \tag{78}$$

によって測定される．$p_0^T y_0 \geq c_0^T x_0$ という仮定の下で，$0 \leq E_P \leq 1$ であり，$E_P = 1$ のとき当該のDMU_0 は利益効率的と判定する．この場合も x^* と x_0

の差，y^* と y_0 の差は，経営改善のための方向を示唆する．上のモデルでは利益を (72) の形で表現したが他の関数型の場合でも同様の解析が可能である．また，利益の出ないＤＭＵの場合（$p_0^T y_0 - c_0^T x_0 < 0$）でも，$p_0^T y^* - c_0^T x^* > 0$ である限り (78) によって一種の利益効率性を定義することができる．

8.2 利益率最大化

利益（＝売上−支出）の最大化を目的とする代わりに，投入価値当りの利益率（＝利益／支出）を最大化するモデルを考える．このモデルは結局（売上／支出）を最大化することになるので，次の分数計画が対応する．

$$
\begin{aligned}
(LRR) \quad \max \quad w &= \frac{p_0^T y}{c_0^T x} && (79)\\
st. \quad x &\geq X\lambda && (80)\\
y &\leq Y\lambda && (81)\\
L &\leq e^T\lambda \leq U && (82)\\
\lambda &\geq 0 && (83)\\
(x, y) &\ \text{の存在領域に関する線形制約.} && (84)
\end{aligned}
$$

ここに，(84) は (77) に対応する制約である．いま，この問題の実行可能領域が有界であると仮定すれば，よく知られているように，この分数計画問題は，新しい変数 $t \in R$ を導入し，$\hat{x} = tx$, $\hat{y} = ty$, $\hat{\lambda} = t\lambda$ という変数の置き換えをすることにより，次のＬＰに帰着する．(例えば，[4], [7] を参照.)

$$
\begin{aligned}
\max \quad w &= p_0^T \hat{y} && (85)\\
st. \quad c_0^T \hat{x} &= 1 && (86)\\
\hat{x} &\geq X\hat{\lambda} && (87)\\
\hat{y} &\leq Y\hat{\lambda} && (88)\\
Lt &\leq e^T\hat{\lambda} \leq Ut && (89)\\
\hat{\lambda} &\geq 0, \quad t \geq 0 && (90)\\
(\hat{x}, \hat{y}) &\ \text{の存在領域に関する線形制約.} && (91)
\end{aligned}
$$

このＬＰの最適解を t^*, $\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$, $\hat{\lambda}^*$ とするとき，$t^* > 0$ であり元の分数計画の最適解は

$$x^* = \hat{x}^*/t^*, \; y^* = \hat{y}^*/t^*, \; \lambda^* = \hat{\lambda}^*/t^* \tag{92}$$

によって定まる．DMU_0 の利益率効率性 E_R は

$$E_R = \frac{p_0^T y_0 / c_0^T x_0 - 1}{p_0^T y^* / c_0^T x^* - 1} \tag{93}$$

によって計測される．

9　その他のモデルと利用

ここでは，ＤＥＡの２つの展開にふれる．

9.1　製品別の効率性

通常，企業においては複数の商品の生産や販売を行っている．それらの商品が同種の入力や出力をシェアしているような場合，各商品をＤＭＵと見なして，ＤＥＡによる効率性分析を行うことができる．その結果は現状の品揃えの妥当性の検討に使うことができる．

9.2　時系列的な分析

ＤＭＵに関するデータが年度毎に揃っている場合，時系列的な解析をし，効率性の経年的な変化を見ることは十分意味のあることである．そのような方法をＤＥＡ／ＷＩＮＤＯＷと呼ぶ（[3]）．ＤＥＡ／ＷＩＮＤＯＷの改良と事例が末吉 [10] にある．

10　ＤＥＡモデルの使い方

これまでＤＥＡモデル群の一例について説明したが，新しいモデルは今後続出するであろう．ＤＥＡモデルを使うに当たってはその特徴をよくわきまえておかねばならない．最も基本的なＣＣＲモデルでは，例えば美人投票のような場合，目美人，鼻美人といったそのＤＭＵの最も得意とする項目を評価するようにウェイトづけをする．即ちＣＣＲモデルは最も甘い評価である．それに対して領域限定法ではそのような極端なウェイトづけを禁止し，もっとバランスの取れたウェイトづけをするように，ウェイトの比をある領域内に限定する．その上で相対評価を行う．領域限定法による効率はＣＣＲのそれより一般に悪くなる．しかし領域限定法のウェイトの比の上下限をどう設定するかについては，関係者のコンセンサスを得なければならない．上下限を非常にゆるく設定すればＣＣＲモデルに限りなく近づくし，上下限の巾を極端に小さくすれば，固定したウェイトでＤＭＵを評価することになりかねない．その点のあいまいさを避けるためにはコスト効率分析法や利益効率分析法を使えばよい．これらのモデルによれば効率性の相対評価ばかりでなく，技術と経営の効率性分析を分離して行うことが出来，改善のための具体的な方向が与えられる点で注目すべきであろう．制御可能変数と制御不能変数の分割やＤＭＵの分割は上記のどのモデルとも併用することができる．多くの場合このような分割は有益であり，より説得的で信頼できる結論を生むことになる．また時系列的な分析を行うＤＥＡ／ＷＩＮＤＯＷは長期的な視点での効率性の推移を見る上で役立つ手法である．こういった様々なモデルを併用しながら問題を分析して行く

ことによって効率性に対するより深い理解と改善の方向が見いだされるであろう．逆に，単一なモデルのみによって解析し結論を出すことは危険ですらある．

ＤＥＡの適用対象としては次のような項目があげられる．（１）企業体の効率性の相対比較，（２）生産や販売の最適なプロダクト・ミックス問題の検討，（３）企業体やその支店の規模の最適化の検討，（４）国際的な分業体制の効率性の検討．

本稿で繰り返し述べたように，ＤＥＡによる解析は対象とする企業体の生産関数と深い係わりを持っている．したがって，生産関数の解明が進むとともに，新しいＤＥＡモデルが構築されるであろう．これらは今後の課題である．

謝辞
本稿の細部にわたり有益なご指摘をいただいたレフェリーに深く感謝します．

参考文献

[1] Adolphson, D.L., G.C. Cornia and L.C. Walters, "A Unified Framework for Classifying DEA Models," *Operational Research '90,"* edited by H.E. Bradley, Pergamon Press, (1991)647-657.

[2] Banker, R.D., A.Charnes and W.W. Cooper, "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis," *Management Science*, 30(1984) 1078-1092.

[3] Charnes, A., C.T. Clark, W.W. Cooper and B. Golany, "A Developmental Study of Data Envelopment Analysis in Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the U.S. Air Forces, " *Annals of Operations Research,* 2(1985)95-112.

[4] Charnes, A. and W.W. Cooper, "Programming with Linear Fractional Functions," *Naval Research Logistics Quarterly*, 9(1962),181-186.

[5] Charnes, A., W.W. Cooper and E.Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units, " *European Journal of Operational Research,* 2(1978) 429-444.

[6] Farrell,M.J., "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society,* (Series A), 120(1957) 253-281.

[7] 今野　浩: 線形計画法, 日科技連,1987.

[8] Seiford, L.H.,"A Bibliography of Data Envelopment Analysis (1978-1991)," Department of Industrial Engineering and Operations Research, The University of Massachusetts, Amherst, MA.

[9] 末吉俊幸, "ＤＥＡによる効率性分析に関する一考察," オペレーションズ・リサーチ, 35(1990)167-173.

[10] 末吉俊幸, "ＤＥＡ／ＷＩＮＤＯＷ分析法による電気通信事業体の経営効率と規模の経済性の比較、検討," オペレーションズ・リサーチ, 37(1992) 210-219.

[11] Thompson, R.G., F.D. Singleton, Jr., R.M. Thrall, and B.A. Smith, "Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas," *Interfaces*, 16(1986)35-49.

[12] 刀根　薫, "企業体の効率性分析手法," オペレーションズ・リサーチ, 32(1987) 800-803,33(1988)45-48,95-99.

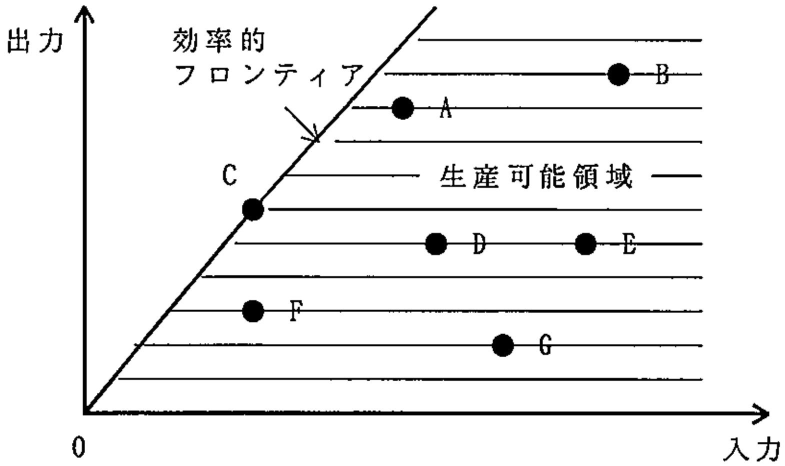

図１．ＣＣＲモデル

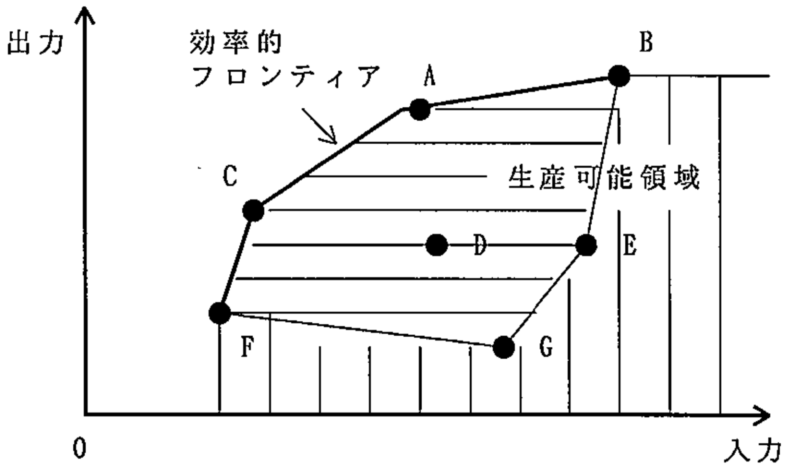

図２．ＢＣＣモデル

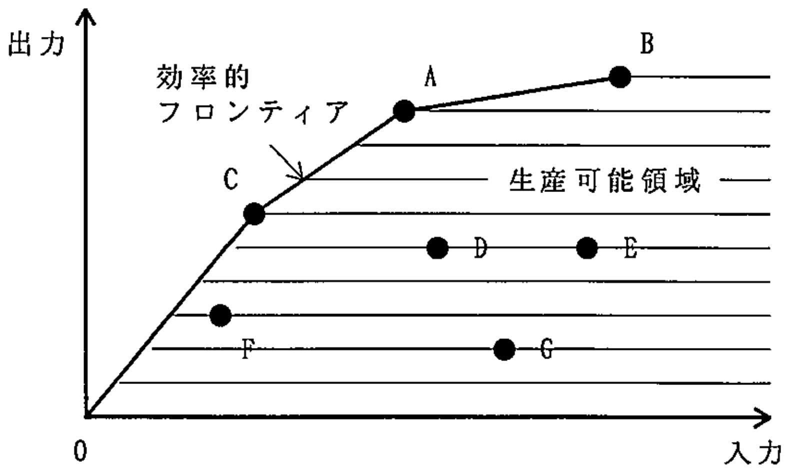

図３．上方向スケール制約モデル

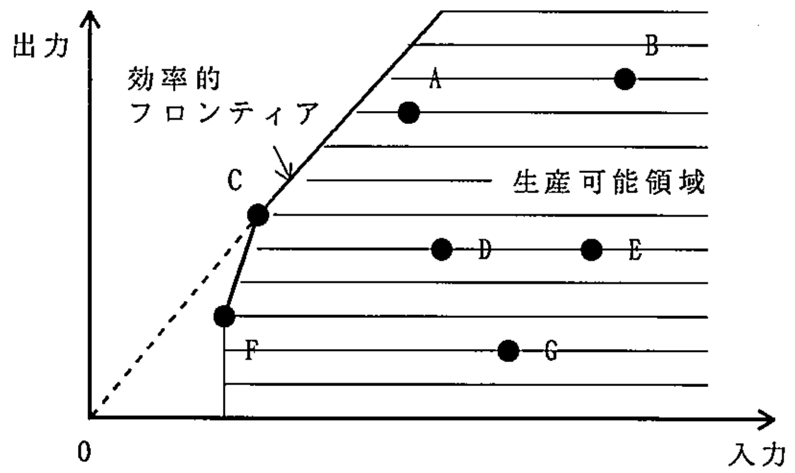

図４． 下方向スケール制約モデル

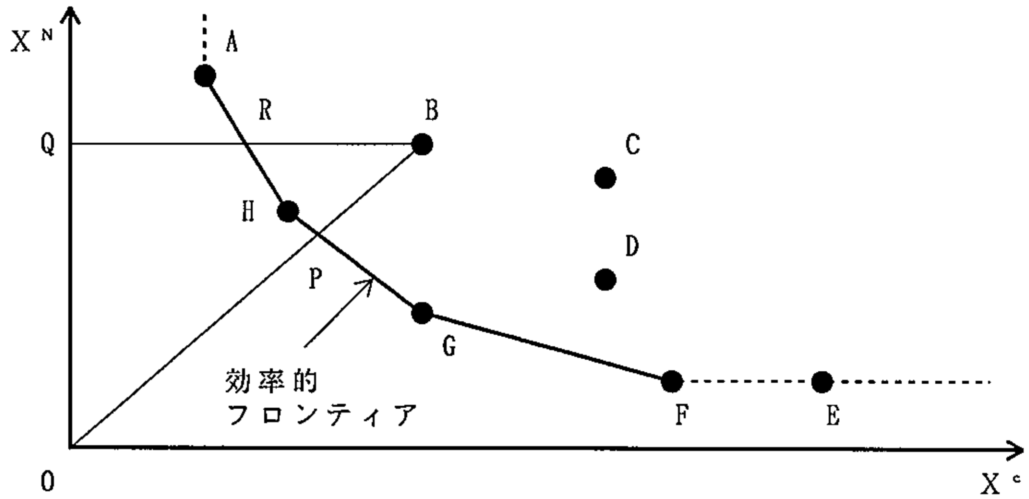

図５． 変数の分割

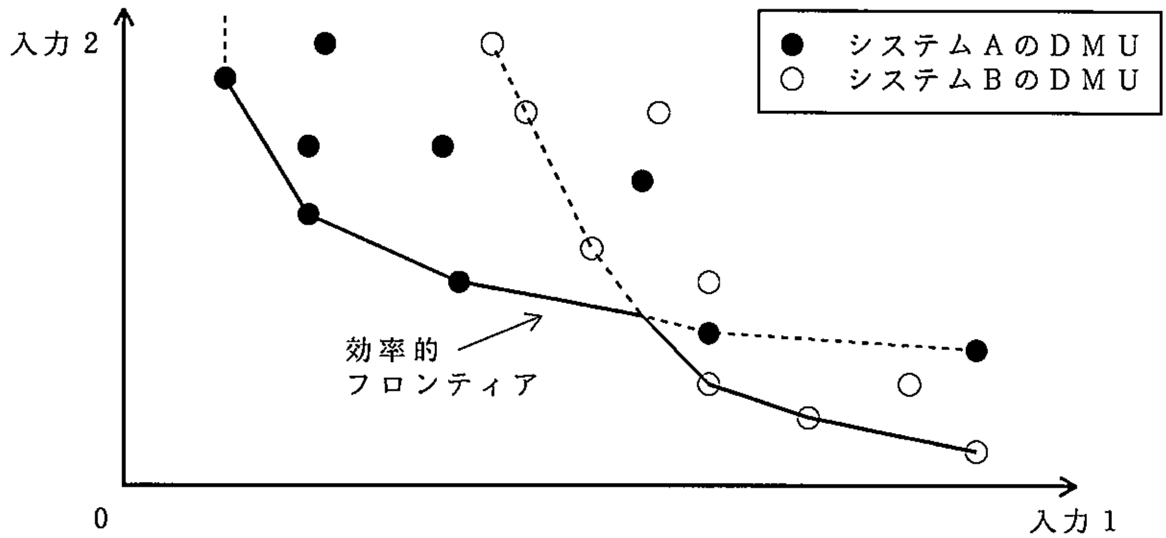

図６． ２つのシステムの効率的フロンティア

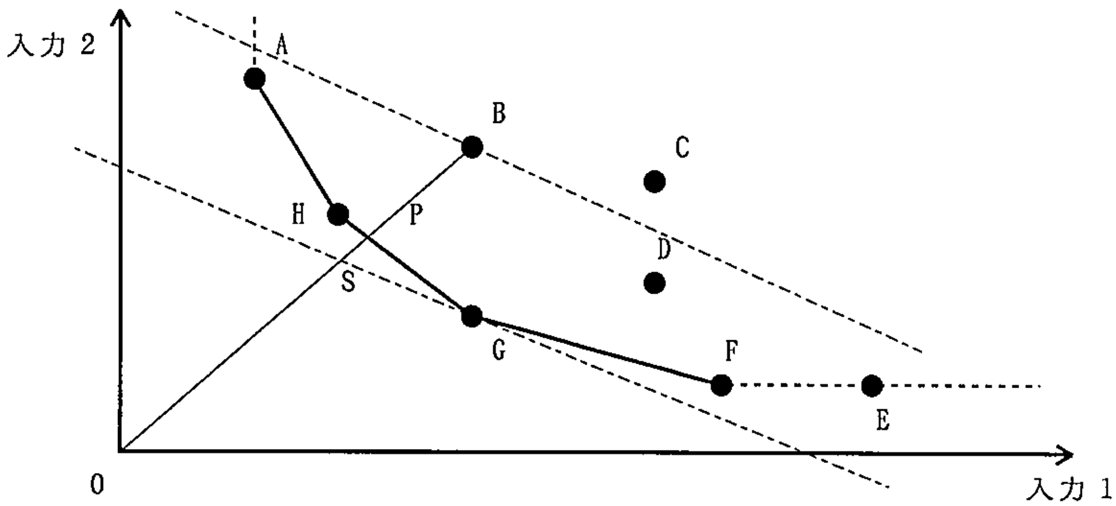

図 7. 技術的効率性とコスト効率性