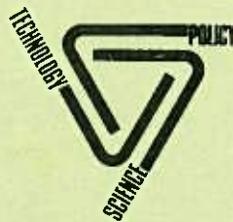


INSTITUTE FOR POLICY SCIENCE
RESEARCH REPORT

線形計画法の
多項式時間解法を
めぐって

刀根 薫

1986年8月



SAITAMA UNIVERSITY
Urawa, Saitama, 338
JAPAN

線形計画法の
多項式時間解法を
めぐって

刀根 薫

1986年8月

アブストラクト

線形計画法の解法として登場してきた
Karmarkar法の基本的な理論について
解説するとともにその後の発展につい
てサーベイしたものである。単体法と
対比した数値計算例も収録している。

線形計画の多項式時間解法を めぐって

刀根 薫

埼玉大学政策科学研究科

1. 線形計画と単体法

線形計画法 (linear programming = LP) の解法としては1947年に G.B.Dantzig によって発明された単体法 (simplex method) が唯一の実用的な解法として約40年間にわたって用いられてきた。しかしよく知られているように単体法では計算量の上限が変数や制約式の個数の多項式オーダーで押さえられるという保証がない。ある特定のピボティング規則にたいして、可能解が構成する凸多面体のすべての頂点をたどらなければ最適頂点に到達できないような例題をつくることができ、しかも凸多面体の頂点の数は変数や制約式の個数に関して組合せ的に増大するからである。したがって単体法は最悪の場合、指数オーダーの解法といわざるをえない。しかし、実用上はそのようなケースが起こることは稀れで、制約式1万個、変数100万個といった大型問題も許容しうる時間内で解かれている。また、理論的にも、単体法の平均的な計算量に関する研究が盛んになっており S. Smale をはじめとする最近の研究では平均的には多項式オーダーであることが指摘されている。しかしながら LP のような基本的な問題に対して指数オーダーの解法しかないということは計算機科学の汚点の1つと見る向きもあり理論家の好目標となっていた。このような状況下で、1979年に Khachiyan[7] が楕円体法 (ellipsoid method) を発表し、LP に多項式オーダーの解法が存在することを初めて世に示した。しかし楕円体法は数値解法としては単体法に遠く及ばないことが判明し、したがって実用化されることはなかったが、理論的な意義は大きく、1984年に Karmarkar (米ATT

Bell研) によって開発された射影法 (projective method) もその延長上に位置づけることができる。

2. 射影法の基本 ([8], [9], [12])

2.1 基本問題

次の問題をKarmarkarの基本問題と呼ぶ。

(P) 目的関数 $z=c^T x \rightarrow$ 最小化
 制約条件

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ e^T x &= n \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに、 $x \in R^n$ 、 A は (m, n) 型定数行列; $e^T = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$ 、 c^T は定数ベクトル $c \in R^n$ の転置を表す。ただし、基本問題は次の仮定を満足しているものとする。

- 仮定 1. z の最小値は0である。
 2. $x^{(0)} = e$ は可能解である。
 3. $m \leq n$ かつ $\text{rank}(A) = m$ 。

次に、 $D = \text{diag}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ を用いて

射影変換 $T (R^n \rightarrow R^n)$ を定義する。

$$T: x' = nD^{-1}x / e^T D^{-1}x$$

T の逆変換は次の通りである。

$$T^{-1}: x = nDx' / e^T Dx'$$

この変換により (P) より次の問題をつくる。

(P') 目的関数 $z' = (Dc)^T x' \rightarrow$ 最小化
 制約条件

$$\begin{aligned} ADx' &= 0 \\ e^T x' &= n \\ x' &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

射影法の基本的な考え方は、(P) を直接解く代わりに (P') を解き、逆変換によって元の問題に戻すことにある。以下の議論では $c^T e > 0$ であると仮定する。

さもなければ $x^{(0)} = e$ は既に最適解となっているからである。

2.2 基本問題の解法

(P) を解くために点列 $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ を規則

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) \quad (2.3)$$

により生成する。一般に入力 $a = (a_1, \dots, a_n)$ から出力 $b = \phi(a)$ を得る手順を次に示す。

ただし $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ とする。

[射影法の1反復]

Step 1 $B := \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$ とする。

Step 2 $c_p := [I - B^T(BB^T)^{-1}B] Dc$ とする。

Step 3 $d := c_p / \|c_p\|$ とする。

Step 4 $b' := e - \alpha d$ とする。 ($0 < \alpha < 1$)

Step 5 $b := Db' / e^T Db'$ とする。

(解説) 射影法は逐次反復法の一つであるが、その特徴は内点法であるという点にある。それに対して単体法は頂点をたどる逐次反復法である。可能領域の内点 $x^{(k)}$ から次の $x^{(k+1)}$ に進むために一度問題を射影変換して (P') の形にしそれをある意味で最適に解いて (P') の内点を求めそれを逆変換によって再び (P) に戻し $x^{(k+1)}$ とする。この射影変換で $x^{(k)}$ は (P') の内点 e (中心と呼ぶ) に写像される。 e から進む方向を決めるために Step 2 で (P') の目的関数の勾配方向を、射影された制約式の係数行列の null space 上に直交投影していることに注意したい。 Step 4 で (P') の中心 e から $-d$ 方向に歩幅 α だけ進み、 Step 5 でその点を逆変換して (P) の内点 $x^{(k+1)}$ を得る。この一回の反復によって (P') の目的関数は最急降下方向に沿って減少するが、 (P) の目的関数は必ずしも減少するとは限らない。それにも関わらず後に示すように次のポ

テンソル関数と呼ぶ関数が (P) でも (P') でも一定量だけ減少してゆくので最適点に収束することがわかる。

(P) のポテンシャル関数

$$f(x) = \sum_j \log(c^T x / x_j)$$

射影変換によってこの関数は (P') では次の形となる。

(P') のポテンシャル関数

$$f'(x') = \sum_j \log((Dc)^T x' / x_j') - \log(\det D)$$

[補題 1] 上の 1 反復によって $a \rightarrow e \rightarrow b' \rightarrow b$ に移るとき

$$f(b) - f(a) = f'(b') - f'(e) \quad (2.4)$$

[補題 2] $x(>0)$ が (P) の可能解で

$$f(x) \leq f(e) - \gamma$$

ならば

$$c^T x \leq \exp(-\gamma/n) c^T e \quad (2.5)$$

2.3 射影法の収束

射影法の反復につき次の各命題が成立する。

[補題 3] $y = (\bar{A}\bar{A}^T)^{-1} \bar{A}\bar{c}$ (2.6)

$$\bar{z} = \min_j (\bar{c} - \bar{A}^T y)_j \quad (2.7)$$

(ただし $\bar{A} = AD$, $\bar{c} = Dc$) とするとき $\alpha > 0$ にたいして

$$\bar{c}^T (e - \alpha d) \leq (1 - \alpha/n) \bar{c}^T e + \alpha (n\bar{z})/n \quad (2.8)$$

[系 1] $0 < \alpha < 1$ であるとき

$$n \log(\bar{c}^T b') \leq n \log(\bar{c}^T e) - \alpha \quad (2.9)$$

[補題 4] $|\varepsilon| \leq \alpha < 1$ のとき

$$\varepsilon - \varepsilon^2/2(1-\alpha)^2 \leq \log(1+\varepsilon) \leq \varepsilon \quad (2.10)$$

[補題 5] $\|x - e\| \leq \alpha < 1$ かつ $e^T x = n$ ならば

$$0 \leq -\sum_j \log(x_j) \leq \alpha^2/2(1-\alpha)^2 \quad (2.11)$$

[定理 1]

$$f'(b') \leq f'(e) - \alpha + \alpha^2/2(1-\alpha)^2 \quad (2.12)$$

とくに $\alpha = 1/3$ ならば

$$f'(b') \leq f'(e) - 1/5 \quad (2.13)$$

[定理 2] 射影法により得られる点列

$$x^{(0)}, \dots, x^{(k)} \quad \text{につき}$$

$$c^T x^{(k)} \leq \exp(-k\gamma/n) c^T x^{(0)} \quad (2.14)$$

とくに $\alpha=1/3$ ならば $\gamma=1/5$ である。

この定理より射影法は広義の1次収束性をもつ。
1反復にかかる計算の手間は $O(n^3 L^2)$ である。ここに L は計算精度に関係する定数である。

したがって次の結論を得る。

〔定理3〕 射影法を $O(nL)$ 回適用することにより

(P) の目的関数 z は

$$z < 2^{-L} \quad (2.15)$$

を満たすにいたる。射影法の時間複雑度は高々 $O(n^4 L^3)$ である。

Karmarkar は Step 2 の直交投影に工夫をこらすことによりこの部分の手間(それが1反復の計算量の大部分を占める)を $O(n^{2.5} L^2)$ に減らすことができることを示した。したがって射影法の複雑度は高々 $O(n^{3.5} L^3)$ とすることができる。

3. 一般の線形計画問題の場合

これまで述べてきたLPは特殊な形をしたKarmarkarの基本型であった。一般のLPをこの形に持ち込むためには一寸した工夫が必要となる。紙面の都合上その概略を述べるにとどめたい。次のLPを考える。

(LP) 目的関数 $z = c^T x \rightarrow$ 最小化

制約条件 $Ax \geq b, \quad x \geq 0$

この問題を主問題とする双対問題(DLP)を同時に考える。

(DLP) 目的関数 $w = y^T b \rightarrow$ 最大化

制約条件 $y^T A \leq c^T, \quad y \geq 0$

LPの双対定理より、(LP)と(DLP)にそれぞれ

可能解が存在するならば主問題の任意の可能解の目的関数値 z と双対問題の任意の可能解の目的関数値 w とは、 $z \geq w$ を満たし、それぞれの最小値 z^* と最大値 w^* は $z^* = w^*$ を満たす。このことから、両方を結合した次の LP を取り上げる。

$$\begin{aligned}
 (\text{CLP}) \quad & \text{目的関数} \quad u = c^T x - y^T b \rightarrow \text{最小化} \\
 & \text{制約条件} \quad Ax \geq b, \quad y^T A \leq c^T \\
 & \quad \quad \quad x \geq 0, \quad y \geq 0
 \end{aligned}$$

この LP の目的関数の最小値は (LP) に有界な最小値が存在する限り 0 である。この変形により基本問題の [仮定 1] は満たされる。次に基本問題では $Ax=0$ という同次型の制約になっている。この形に変形するためには (CLP) の制約にスラック変数を入れて等式化した上でいわゆる罰金変数を 1 つ導入すればよい。更に、 $e^T x = n$ という制約は、(LP) の変数を適当にスケールリングした上で、スラック変数を 1 つ導入することにより可能となる。[仮定 2] ($x^{(0)} = e$ が可能解) は上の変形の際に考慮できることである。[仮定 3] ($\text{rank}(A) = m$) はほぼ自明にみたされる。

こうして、一般の LP は、(射影法を適用する前に) 一回だけ上記の変形をすることにより Karmarkar の基本型に帰着できる。計算複雑度には影響を与えない。また不能な LP の判定は罰金変数が 0 になるかならないかのできるし、最適解の有界性はスケールリングの際に導入したスラック変数が 0 になるかどうかで判明する。こうして、単体法と同じ機能を持つ。ただし、単体法が最適”基底”解を求めるのにたいして、射影法はそれを直接対象としていないので ε 近傍解を求めることになる。

4. 射影法あるいは内点法は LP の実用的な解法となりうるか？

一般に計算複雑度に関する議論は慎重になされねばならない。この前のKhachiyanの場合もそうであったが多項式性即計算法としての高速性ということには直結するとは限らないからである。(勿論、理論上の貢献は大であるが。)射影法でも前述の算法をそのまま実行したのでは単体法に遠く及ばない。このことを多くの人々が経験し射影法に疑問を持つにいたっている。Karmarkarは最初の発表の時から「5000変数の問題を単体法より50倍も速く解いた。」と公言している。しかし算法の細部を公表しないので真偽の程は不明である。その背景にはATTの方針があると聞く。しかし、1986年に入ってからKarmarkar以外の人達の工夫によって単体法を越える内点法の計算結果が出始めた。それらは、算法を明示しているので追試が可能である。小島、刀根による改訂Karmarkar法[10]、Adler, Karmarkar, Resende, Veigaによる双対アフィン法[11]などである。また、伊理、今井によるニュートン法[6]は収束の速さが超1次であるという点で注目すべき方法である。Gill, Murray, Saunders, Wright[5]は双対問題にたいしていわゆるlogarithmic barrier functionを考えニュートン法を適用することを提案している。

大規模LPを処理する際、重要なこととして sparse matrix を取り扱う技術の問題がある。これまでの単体法の成功はこの技術に負う所が大きい。内点法においても事情は同じである。単体法、内点法の優劣を議論するとき matrix計算の技術の違いが原理の違いと同等に決め手となるであろう。ある原理はそれ自体の優劣とは別にそれを implementする技術が伴うかどうかで実用上の評価が決まる点に注意したい。

4. 1 内点法を実用化する上で考慮すべき諸要因

(1)射影法の原理に沿って計算量を減らす方法

一般のLPをKarmarkarの基本型に変形する方法につい

てはすでにふれたが、それはあくまでも原則論であって実際の計算には不向きである。問題のサイズを大きくするからである。また、この基本型はreal-worldの問題からみると極めて不自然で不具合でもある。しかし射影法を実用化するためには、なによりもStep 2 の直交投影の計算量を減らさねばならない。こう言った面での研究がなされている。それらは次のようなものである。

- a. 一般のLPから直接射影変換する方法
- b. 目的関数の最小値を0にする代わりに、暫定的な最小値または下界値を設定し、計算の途中でその値を改訂して行く方法
- c. $(BB^T)^{-1}$ または $(AD^2A^T)^{-1}$ の計算量を減らすためにこの部分をあまり頻繁にupdateしない方法
- d. 基底を導入して最適性の判定をするとともに、 c_p の効率的な計算に利用する方法
- e. ポテンシャル関数を最小化するために直線探索を用いる方法
- f. 最適解において正になる変数と0になる変数を早めに見つけて問題の規模を縮小する方法
- g. 点列 $\{x^{(k)}\}$ の軌跡を微分方程式で追跡する方法

ここで射影法で最も手間のかかるStep 2の計算

$$c_p = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]c \quad (\text{但し } \bar{c} = Dc) \quad (4.1)$$

についてふれておく。 $[]$ のなかはprojection matrixと呼ばれるものでこれを P_B とおく。

$$P_B = I - B^T(BB^T)^{-1}B \quad (4.2)$$

B は $AD(=\bar{A}$ とおく)の底に e^T をつけた特別の形をしている。そこで

$$P_{\bar{A}} = I - \bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A} \quad (4.3)$$

とおき、 $\bar{A}e = 0$ を考慮すれば

$$P_B = P_{\bar{A}} - ee^T/n \quad (4.4)$$

となるので、結局 $P_{\bar{A}}$ を求めることが問題となる。しかもこの計算の核心の部分は $(\bar{A}\bar{A}^T)$ を係数行列とする連立一次方程式を解くことである。そのため (a) $\bar{A}\bar{A}^T$ を LL^T 分解する (b) \bar{A} を QR 分解する (c) CG 法を用いる方法がある。 \bar{A} が sparse な場合にこの部分を如何に高速に処理するかが決め手となる。

またこの projection を別の見方をすることもできる。

c_p は $\bar{A}y=0$ という条件下での

$$\min_y \|\bar{c}-y\|^2 \quad (y \in R^n) \quad (4.5)$$

の解である。 $\bar{A}y=0$ という式は \bar{A} の基底 \bar{A}_1 と非基底 \bar{A}_2 を用いて

$$\bar{A}_1 y^1 + \bar{A}_2 y^2 = 0$$

となるが、これは

$$y^1 = -\bar{N}y^2 \quad (y^1 \in R^m, y^2 \in R^{n-m}, \bar{N} = \bar{A}_1^{-1}\bar{A}_2) \quad (4.6)$$

とすれば

$$\min_{y^2} \left\| \bar{c} - \begin{bmatrix} -\bar{N} \\ I \end{bmatrix} y^2 \right\|^2 \quad (y^2 \in R^{n-m}) \quad (4.7)$$

という低次の最小二乗法に帰着する。ここに

$$\tilde{c}^T = [0, \tilde{c}_2^T], \quad \tilde{c}_2^T = \bar{c}_2^T - \bar{c}_1^T \bar{N}$$

とする。(ただし \bar{c}_1, \bar{c}_2 は \bar{A}_1, \bar{A}_2 に対応する \bar{c} の分割)

これを CG 法で解くことが考えられる。その際 y^2 の初期値として reduced gradient \tilde{c}_2 を用いれば点列と基底が最適のものに近づくにつれて CG 法が速く収束することが期待できる。小島、刀根による改訂 Karmarkar 法 (RK 法) では基底を中心にとりこみこのフレームワークを用いている。

(2) 射影変換以外の変換を用いる方法

射影変換以外の変換とくにアフィン変換を用いる方法が注目されている。この方法の複雑度については不明な点があるが、解法としては射影法自体よりも簡潔で直接的であり、数値実験の結果も良好である。

アフィン法は次の LP をそのまま対象とする。

$$(LPP) \quad \text{目的関数} \quad z=c^T x \rightarrow \text{最小化} \quad (4.8)$$

$$\text{制約条件} \quad Ax=b, \quad x \geq 0$$

ただしAは(m,n)型でrank(A)=mとし、正の可能解 $x^{(0)}$ が既知であるとする。(それが未知のときは罰金変数を導入してアフィン法でPhase 1 を実行する。)

アフィン法は $D=\text{diag}(x^{(0)})$ をもとに

$$x=Dy \quad (R^n \rightarrow R^n) \quad (4.9)$$

というアフィン変換を用いる。これは一種のスケーリングであるからアフィンスケーリング法と呼ぶこともある。このスケーリングにより $x^{(0)}$ はy空間の中心eに移る。また(LPP)は次の(LPA)となる。

$$(LPA) \quad \text{目的関数} \quad w=\bar{c}^T y \rightarrow \text{最小化} \quad (4.10)$$

$$\text{制約条件} \quad \bar{A}y=b, \quad x \geq 0$$

ここに $\bar{c}=Dc$, $\bar{A}=AD$ とする。projection matrix $P_{\bar{A}}$ を用いて \bar{c} を \bar{A} のnull space上に投影し c_p を得る。

中心eから $-c_p$ 方向にある歩幅進んだ点を $y^{(1)}$ とする。

$$y^{(1)}=e-\gamma t c_p \quad (4.11)$$

ここに $0 < \gamma < 1$

$$t=\min_j \{1/(c_p)_j \mid (c_p)_j > 0\} \quad (4.12)$$

この $y^{(1)}$ より逆変換により

$$x^{(1)}=Dy^{(1)} \quad (4.13)$$

を得る。 γ としては0.9-0.99程度の値を用いる。停止条件としては目的関数の相対的改善度が許容値以下になることを用いる。

$$\|z^{(k+1)}-z^{(k)}\| / \|z^{(k)}\| < \varepsilon \quad (4.14)$$

こうしてアフィン法の算法を得る。

- $x^{(0)} > 0$, $Ax^{(0)}=b$ を満たす初期点 $x^{(0)}$ と定数 γ ($0 < \gamma < 1$)を選ぶ。
- $k:=0$ とする。
- 停止条件が満たされないかぎり
begin

$$D_k := \text{diag}(x^{(k)})$$

$$c_p := [I - D_k A^T (A D_k^2 A^T)^{-1} A D_k] D_k c$$

$$\alpha := \gamma \times \min\{1/(c_p)_j \mid (c_p)_j > 0\}$$

$$d_x := D_k c_p$$

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \alpha d_x$$

$k := k+1$

end

射影法の成功がスケーリングの巧妙さに由来することに着目しその利点をより直接的に取り込んだのがアフィン法であるとみることにもできる。その意味では他のスケーリングも候補となりうるし、より一般に nonlinear geometry の metric 構造を対象とする研究も行われつつある。

(3) 罰金関数にニュートン法を直接適用する方法

伊理、今井 [6] は線形計画

目的関数 $c^T x \rightarrow$ 最小化

制約式 $Ax \geq b$ (A は (m, n) 型行列)

に対して ① $Ax^{(0)} > b$ である内点 $x^{(0)}$ が既知 ② 目的関数の最小値 = 0 という仮定の下に罰金関数

$$F(x) = (c^T x)^{m+1} / \prod_i (a_i x - b_i) \quad (4.15)$$

を設定する。(ここに a_i は A の第 i 行ベクトル。)

$F(x)$ は可能領域内で凸であり、かつ $x \rightarrow x^*$ (最適点) であるための必要十分条件が $F(x) \rightarrow 0$ であるという性質を利用して $F(x)$ の最小化をニュートン法により実行する。この方法の反復は超 1 次収束性をもつ。

仮定を外すこととニュートン法の 1 反復に要する計算の手間を減少させる方向に研究は進行中である。

4.2 Karmarkar 法以前の内点法との関連

内点法はそれ自身の歴史と理論と算法をもっている。

特に非線形計画法の解法は殆んどが内点法である。

Gill et al.[4]は射影法を従来からあるbarrier methodの一つとして解釈できることを示した。アフィン法もその方向から考察することが可能であり、そのことによりアフィンスケーリングの意味もより明確に理解できる筈である。

Frisch[3]は不等式制約を目的関数に取り入れて logarithmic barrier functionを定義したが、(LPP)の場合次のようになる。

$$F(x) = c^T x - \mu \sum_j \log(x_j) \quad (4.16)$$

ここに μ は barrier parameter と呼ぶ正数である。
 $F(x)$ を目的関数とする次の非線形計画を考察する。

(NLP(μ)) 目的関数 $F(x) \rightarrow$ 最小化

$$\text{制約条件 } Ax = b \quad (4.17)$$

(NLP(μ)) の解と (LPP) の解の間には次の関係がある。

「 $x^*(\mu)$ を (NLP(μ)) の最適解とすれば、 $\mu \rightarrow 0$ のとき $x^*(\mu)$ は (LPP) の最適解 x^* に収束する。」(Fiacco and McCormick[2]) さらにMifflin[11]によって収束の速さに関して次のことが分かっている。(LPP) が非退化のとき十分小なる μ にたいして

$$\|x^*(\mu) - x^*\| = O(\mu) \quad (4.18)$$

退化しているときは

$$\|x^*(\mu) - x^*\| = O(\mu^{1/2}) \quad (4.19)$$

さて、(NLP(μ)) の内点可能解 $x(>0)$ が既知としてそれから動く方向 p を求めることを考える。 $F(x)$ を p についてテーラー展開し2次の項までで近似すると次の(QP)を得る。

(QP) 目的関数 $g^T p + (1/2)p^T H p \rightarrow$ 最小化

$$\text{制約式 } Ap = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{ここに } g = \nabla F = c - \mu D^{-1} e \quad H = \nabla^2 F = \mu D^{-2} \quad (4.21)$$

である。ただし、 $D = \text{diag}(x_j)$ とする。この(QP)の

exactな解を p_B とすれば

$$p_B = -(1/\mu)D[I - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD](Dc - \mu e) \quad (4.22)$$

であることが分かる。

一方、アフィン法の進行方向 $-d_x$ は

$$-d_x = D(I - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD)Dc \quad (4.23)$$

であったので、両者の違いは定数項を除き

$$Dc \quad \text{と} \quad Dc - \mu e$$

の違いである。 μ を十分小にすれば両方向はほぼ一致する。こうして射影法やアフィン法で中心的役割をもつ AD^2A^T 或は AD という要素は log barrier function を2次近似してニュートン法を(一回)適用することから発生することが分かる。また、ニュートン法による方向は座標のアフィン変換に対して invariant である。

Gillらは[5]でこの方法を双対問題(LPD:後述)に対して適用することを提案している。そうすれば対応する logarithmic barrier function は

$$G(y) = b^T y + \mu \sum_j \log(c_j - a_j^T y) \quad (4.24)$$

となり、(NLP)は $G(y)$ を制約なしに最大化することになって、主問題の場合より計算の手間が少なくすむと指摘している。

4.3 数値計算例

(1)改訂Karmarkar法 [10]

この方法の特徴は行列 A の基底を中心に据え射影法を実行する点にある。そして

- a. 標準型LPから直接射影変換する。
- b. c_p の計算のために reduced gradient とCG法を組み合わせる。
- c. z の最小値の下界値の改訂、最適基底変数、最適非基底変数の決定を取り入れる。
- d. 基底の改訂を行うとともに、最適基底の判定を行う。

この方法を用いて次の2つの型のランダムLPをといている。

$$\begin{aligned} \text{[問題1]} \quad & \text{目的関数} \quad z = e^T x \rightarrow \text{最大化} \\ & \text{制約条件} \quad Ax \leq 10^4 e, \quad x \geq 0 \quad (4.25) \end{aligned}$$

ここに、 A は (m, m) 型行列でその要素は1から1000までの整数とする。

$$\begin{aligned} \text{[問題2]} \quad & \text{目的関数} \quad z = c^T x \rightarrow \text{最小化} \\ & \text{制約条件} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (4.26) \end{aligned}$$

ここに、 A は $(m, 2m)$ 型行列でその要素は区間 $[0, 1]$ の1様乱数、 b_i は A の第 i 行のユークリッドノルム、 c_j は区間 $[-0.5, 0.5]$ の1様乱数とする。

表1と表2に各 m にたいするRK法の反復回数、ピボット数、CG回数、CPU時間を単体法のそれと比較して示す。 m が大になるにつれてRK法の方が早く最適解に達することが分かる。また、射影変換の代わりにアフィン変換を用いた結果も示す。さらに、結果は良くなっている。実験はすべて最適基底解を得て終了している。単体法としては改訂単体法を用いている。これらの問題は係数行列がdenseで特殊なものであるとはいえRK法とくにアフィン版RK法の可能性の高さを強く示唆している。

(2) 双対アフィン法 [1]

Adlerらによるこの方法はアフィン法を(LPP)の双対問題(LPD)に対して適用する。

$$\begin{aligned} \text{(LPD)} \quad & \text{目的関数} \quad w = b^T y \rightarrow \text{最大化} \\ & \text{制約条件} \quad A^T y \leq c \quad (4.27) \end{aligned}$$

この制約条件に非負のスラック変数 $v \in R^n$ を導入し、 v についてのみアフィンスケーリングを施す。したがって双対アフィン法の一反復は次の様になる。

$$\begin{aligned} & \text{begin} \\ & \quad v^{(k)} := c - A^T y^{(k)} \\ & \quad D_k := \text{diag}(1/v_1^{(k)}, \dots, 1/v_n^{(k)}) \end{aligned}$$

$$d_y := (AD_k^2 A^T)^{-1} b$$

$$d_\nu := -A^T d_y$$

$$\alpha = \gamma \times \min\{\nu_j^{(k)} / (d_\nu)_j \mid (d_\nu)_j < 0, j=1, \dots, n\}$$

$$y^{(k+1)} := y^{(k)} + \alpha d_y$$

$$k := k+1$$

end

(LPD) の ε 最適解が得られた後で (LPP) の最適解は

$$x := -D_k^2 d_\nu$$

により計算される。Adlerらは $AD_k^2 A^T$ の LL^T 分解と CG法を組み合わせる matrix の sparsity を出来るだけ保つような方法を工夫し 実際的な LP をといている。その一部を表3に示す。大規模問題ほどこのアプローチが有効であることが分かる。この表には Karmarkar が 1985年4月 ORSA/TIMS で発表した同一問題に対する計算結果も示した。この値が事実とすれば彼は未だ公開しない秘密の武器を持っていることになる。

謝辞

Bell研究所の N. Karmarkar 博士から 1986年6月の訪日の際多くの有益な情報を得ました。東京工業大学の小島政和助教授からは共同研究者として種々の御教示を受けています。また、本報告の数値実験は埼玉大学情報処理センターで行いました。上記の方々及び機関に対して深く感謝します。

文献

- [1] I. Adler, N. Karmarkar, M. Resende and G. Veiga, "An Implementation of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming," Working Paper, Operations Research Center, University of California, Berkeley, CA, 1986.
- [2] A.V. Fiacco and G.P. McCormick, Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley and Sons, 1968.
- [3] K.R. Frisch, "The Logarithmic Potential Method of Convex Programming," Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.
- [4] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin and M. H. Wright, "On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method," Report SOL 85-11, Department of Operations Research, Stanford University, 1985.
- [5] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders and M. H. Wright, "A Note on Nonlinear Approaches to Linear Programming," Report SOL 86-7, Department of Operations Research, Stanford University, 1986
- [6] M. Iri and H. Imai, "A Multiplicative Penalty Function Method for Linear Programming-- Another 'New and Fast' Algorithm," Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium, Japan, 1985, pp.97-120.
- [7] L. G. Khachiyan, "A Polynomial Algorithm in Linear Programming," Soviet Mathematics Doklady 20, 1979, pp.191-194.
- [8] N. Karmarkar, "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming," Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1984.
- [9] N. Karmarkar, "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming," Combinatorica 4, 1984, pp.373-39:
- [10] M. Kojima and K. Tone, "An Efficient Implementation of Karmarkar's New LP Algorithm," Research Report B-180, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1986.
- [11] R. Mifflin, "On the Convergence of the Logarithmic Barrier Function Method," in Numerical Methods for Non-Linear Optimization (F. Lootsma, ed.), pp.367-369, Academic Press, 1972.
- [12] M. J. Todd and B. P. Burrell, "An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variables," Technical Reports 648, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, 1985.

表 1 問題 1

m	反復回数			ピボット数		CG回数		CPU時間比	
	RK	A	S	RK	A	RK	A	S/RK	S/A
50	16	11	70	36	34	47	34	0.58	0.86
100	26	14	191	74	61	85	68	0.98	1.66
150	32	17	448	111	92	113	93	1.75	2.87
200	41	19	727	167	127	160	117	2.10	3.65
250	52	24	1224	214	172	232	153	2.64	4.68

注) RK=改訂Karmarkar法
 A=アフィン版RK法 S=単体法
 単体法のピボット数は反復回数と同じ
 すべての数値は10問題の平均値

表 2 問題 2

m	反復回数			ピボット数		CG回数		CPU時間比	
	RK	A	S	RK	A	RK	A	S/RK	S/A
50	18	17	132	74	61	62	67	0.83	0.99
100	20	18	337	148	127	98	110	1.38	1.56
150	29	27	565	236	206	143	158	1.57	1.80
200	36	33	851	353	290	196	198	1.74	2.05

注) 諸記号等は表 1と同じ。

表 3 双対アフィン法 ([1])

問題名	m	n	n(A)	反復回数			CPU時間比	
				DA	KA	S	S/DA	S/KA
AFIRO	27	51	102	20	17	6	0.7	18.8
ADLITTLE	56	138	424	24	22	119	1.8	2.6
SHARE2B	96	162	777	28	17	119	0.9	7.3
SHARE1B	117	253	1173	39	26	391	2.1	5.2
BEACONFD	173	295	3408	23	22	41	0.3	3.5
BRANDY	220	303	2202	38	18	313	0.9	6.3
E226	223	472	2768	40	22	568	1.6	6.8
BANDM	305	472	2494	33	21	313	1.8	7.7
SHIP04S	402	1506	4400	31	--	395	2.2	--
SHIP08S	778	2467	7194	34	--	657	4.4	--
SCSD8	397	2750	8584	24	--	1590	8.6	--

注) 「問題」はStanford大学Systems Optimization Lab.のもの
n(A)はAの非ゼロ要素数
DA=双対アフィン法による結果
KA=Karmarkarが1985年4月ORSA/TIMSで発表した結果
S=Stanford大学SOLの数理計画法コードMINOS 4.0の単体法による結果