90-B-3

ＡＨＰにおけるコピーまがいの代替案への現実的対処法

刀根薫

１９９０．９．６

ＡＨＰにおけるコピーまがいの代替案への現実的対処法

刀根　薫

０．はじめに

ＡＨＰ（階層化意思決定法）の欠点としていわゆるランクの逆転現象がしばしば指摘される．この点に配慮することなくＡＨＰを用いると誤った結論に導かれることがある．この現象は代替案の中に，評価基準に関して同一スコア（一対比較値）をもつもの（コピー）が含まれていたり，ほぼ同一のもの（コピーまがい）が含まれている場合に発生し，コピーやコピーまがいの属する案の重要度が不当に歪められて誤った結論に達することがある．

この研究ノートでは，第１節においてコピーやコピーまがいの起こす弊害について考察する．第２節では，重要度計算において固有ベクトル法と幾何平均法がほぼ同じ値を与えることを示す．第３節では幾何平均法を用いて，コピーまがいのものが重要度に与える影響の大きさを分析する．第４節では相対誤差と絶対誤差の関係について調べる．第５節では重要度の計算値からコピーまがいのものを発見する方法を提案する．第６節ではここに提案した方法の実務上の使い方について具体的に述べる．

１．コピーやコピーまがいの代替案とその弊害

ある評価基準 C に関する n コ の代替案 $A_1,\dots,A_n$ の一対比較行列を $A=(a_{ij})$ とする．A は n次の正方行列で次の性質をもつ．

(1.1)　$a_{ii}=1\ (i=1,\dots,n)$, $a_{ij}=1/a_{ji}\ (i,j=1,\dots,n)$, $a_{ij}>0\ (i,j=1,\dots,n)$.

a_{ij}の値は通常 1/9,1/8,....,1/2,1,2,....,8,9 のスケールの中から A_i と A_j の価値に関する一対比較によって選ばれる．以下この値をＡＨＰスケールと呼ぶことにする．

いま，A の行ベクトルのうち２つのもの（それを一般性を失うことなく第1行と第n行とする）が同一であるとき互いに”コピー”であるという．(1.1) の２番目の関係式から２つの列も同一である．このとき A の右固有ベクトルを $w=(w_1,\dots,w_n)$とすれば

(1.2)　　$$w_1 = w_n$$

となる．また２つの行がほぼ同一であるとき互いに”コピーまがい”と呼ぶこと

にする．後ほどこの近さについてはより詳細に検討するが，コピーまがいの行に関しても w_1 と w_n の値はほぼ等しい値となる．

コピーやコピーまがいの代替案が混入しているときＡＨＰによる結論が誤りになることがある．それを刀根[6]から引用する．

”ある企業の採用担当者にＡ氏とＢ氏がいて，その力関係は 0.68 対 0.32 でＡ氏の方が強いとする．候補者としてはＸ君とＹ君がいるが，Ａ氏は 2対1 でＸ君を好み，Ｂ氏は 1対3 でＹ君を好むとする．そのときＡＨＰによる評価は下のようになる．

	Ａ氏(.68)	Ｂ氏(.32)
Ｘ君	.666	.25
Ｙ君	.333	.75

総合評価は Ｘ=.666×.68+.25×.32=.533，Ｙ=.333×.68+.75×.32=.466 となってＸ君の方が有利である．

ここでＸ君型の人（コピー）がもう１人応募してきたとする．それを X_1君としよう．Ａ氏，Ｂ氏の好みはＸ君のケースと同じとする．そのとき評価は次のようになる．

	Ａ氏(.68)	Ｂ氏(.32)
Ｘ君	.4	.2
X_1君	.4	.2
Ｙ君	.2	.6

各氏とも，ＸタイプとＹタイプに対する評点の差が前にくらべて減少したことに注意したい．その結果，総合得点では $X=X_1$=.4×.68+.2×.32=.336，Ｙ=.2×.68+.6×.32=.328 となってＸ，X_1君とＹ君の差は僅少となる．

ここでＸ君型の人がさらに１人応募してきたとする．それを X_2君としよう．Ａ氏，Ｂ氏の好みはＸ君の場合と同じとする．そのとき評価は次のようになる．

	Ａ氏(.68)	Ｂ氏(.32)
Ｘ君	.286	.167
X_1君	.286	.167
X_2君	.286	.167
Ｙ君	.143	.500

各氏とも，Xタイプと Yタイプに対する評点の差が前にくらべてさらに減少したことに注意したい．その結果，総合得点では $X=X_1=X_2=.286\times.68+.167\times.32=.248$，$Y=.143\times.68+.500\times.32=.258$ となってY君の方が有利になり逆転する．これを代替案の追加による順位の逆転と呼ぶ．"

この例ではコピーを追加していったが，最初からコピーやコピーまがいが入っているかもしれない．そのような場合AHPによる結論は誤りとなりかねない．このような現象が発生する可能性があることはAHPの欠点としてAHP批判派から強く非難されている（たとえば Dyer[1]）．

そこでこのようなコピーやコピーまがいのものが一対比較行列に含まれているかどうかを調べる必要がある．それを，一対比較行列上で行なうとすれば ${}_nC_2$回の行比較を必要とし，更に評価基準が複数個ある場合（それが普通である）には，その数倍の比較を行なわねばならない．そこでむしろ行列の事前検査をやめて，通常の方法で総合的重要度を計算し，その値の近さから逆にコピーやコピーまがいと思われる代替案（群）を発見する方法を考える．もし2つの代替案が互いにコピーならば総合的重要度は同一になる．コピーまがいの場合にはほぼ等しい値になる．しかし逆は成立しないので，ほぼ等しい重要度をもつ2つの代替案がコピーまがいであるかどうかの最終的な判定は一対比較行列（通常複数個）に戻って調べねばならない．しかしその手間は，全部を事前に調べる手間よりはずっと少ない筈である．

実は，この現象に関する研究としては Saaty[5]がある．それによれば重要度が10% 程度異なる代替案はコピーまがいの可能性があるとしている．Saaty の解析方法とここで述べる方法は全く異なるし，それから得られた結論も若干違う点があることにまず注意したい．

次節では，まず固有ベクトル法と幾何平均法の関係について述べる．

2．固有ベクトル法と幾何平均法

固有方程式

(2.1) $$Aw=\lambda_{max}w ,$$

を満足する実最大固有値 λ_{max} とその固有ベクトル w を求め，固有ベクトル の要素の和が1になるように正規化して（以後正規化とはこの操作を指す），重要度

w を求める方法を固有ベクトル法と呼ぶ．それに対して A の各行要素の幾何平均からなるベクトルを求め，それを正規化して重要度 g を求める方法を幾何平均法という．すなわち

(2.2)　　$(\Pi_{j=1}{}^{n}a_{1j})^{1/n}, (\Pi_{j=1}{}^{n}a_{2j})^{1/n}, \ldots, (\Pi_{j=1}{}^{n}a_{nj})^{1/n}$

を正規化して $g_1, g_2, \ldots, g_n$ とする方法である．

容易に判るように，行列 A が完全に整合性をもつとき，すなわち

(2.3)　　$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$

がすべての i, j, k について成立するならば

(2.4)　　$w=g$

となる．いわゆる整合度(CI)や整合比(CR)が小さい場合に両者が近接することは容易に想像されることであるが，それをモンテカルロ実験で確かめたのが表2．1である．

その実験は次のように行なった．

1．A の第1行を次のように決める．$a_{11}=1$ とし，a_{1j} $(j=2, \ldots, n)$ を1/9, ..., 9 のＡＨＰスケールからランダムに選ぶ．

2．以下，A の第2行～第(n-1)行の右上半分，すなわち a_{ij} $(i=2, \ldots, n-1; j=i+1, \ldots, n)$ を次のように決める．

$x=a_{1j}/a_{1i}$ を計算し

（１）$x>9$ ならば，$a_{ij}=9$ とする．

（２）$x<1/9$ ならば，$a_{ij}=1/9$ とする．

（３）$1/9 \leqq x \leqq 9$ ならば 1/9, ..., 9 のうち x に直近の値を求める．直近の値が唯一に定まらない場合はそのなかからランダムに選ぶ．直近値を中央として含む前後５コの値のなかから，ランダムに a_{ij} を決める．例えば $x=1.666$ ならば，1/2, 1, 2, 3, 4 のなかからランダムに選ぶ．ただし1/9 や9に近い場合には 1/9や 9を必要な個数分繰り返し用いる．例えば $x=8$ ならば 6, 7, 8, 9, 9 のなかからランダムに選ぶ．

3．A の左下部分は逆数関係 $a_{ji}=1/a_{ij}$ によって決める．

4．$a_{ii}=1$ $(i=2, \ldots, n)$ とする．

5．Aの固有ベクトル w を求める．CI，CRも求める．A の幾何平均ベクトル g を求める．

以上の手順によって w と g を計算し，CI≦.1または CR≦.1を満たすものについて $|w_i-g_i|$ $(i=1,...,n)$ の平均値

(2.5) $\mu = \Sigma_{i=1}^{n} |w_i-g_i|/n$

を計算する．

以上のモンテカルロ実験を各 n につき1000回繰り返して平均値 μ の平均，標準偏差(σ)を求めた結果が表2．1である．平均の回りで 2σ 以内に入る μ の割合はすべての場合に95%以上であった．n次の行列の場合，重要度の平均が 1/n であることから見れば表の1こ当りの w_i と g_i の差は無視できる程度であることが分かる．ほぼ同様のことが Golden と Wang[3] によっても確かめられている．そこで以下の解析では専ら幾何平均法を対象とする．

表2．1 固有ベクトル法と幾何平均法の差

n	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	0	.002	.003	.004	.003	.003	.003	.003
σ	0	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001

3．コピーまがいの重要度

A の第1行にたいして第n行がコピーまがいであるとする．そして第n行の各要素は第1行の各要素と以下の関係があるとする．

(3.1) $a_{nj}=a_{1j}(1+\varepsilon_j)$ $(j=1,...,n-1)$

ただし

(3.2) $a_{nn}=1,\ a_{1n}=1/a_{n1}=(1+\varepsilon_1)^{-1}$

である．

ここに ε_j は a_{nj} が a_{1j} に対してもっている相対誤差あるいは摂動とみることができる．ただし ε_j は小で $1+\varepsilon_j>0$ とする．ここで幾何平均法を用いて g_1 と g_n を求める．

(3.3) $g_1 = (\Pi_{j=1}^{n} a_{1j})^{1/n} = ((1+\varepsilon_1)^{-1}\Pi_{j=2}^{n-1} a_{1j})^{1/n}$

(3.4) $g_n = (\Pi_{j=1}{}^{n} a_{nj})^{1/n} = ((1+\varepsilon_1)\Pi_{j=2}{}^{n-1} a_{1j}(1+\varepsilon_j))^{1/n}$

よって

(3.5) $g_n/g_1 = (1+\varepsilon_1)^{2/n}\Pi_{j=2}{}^{n-1}(1+\varepsilon_j)^{1/n}$

となる.

この操作により$\{a_{1j}\}$や$\{a_{nj}\}$の値は g_n/g_1 に直接関係しなくなったことに注意する. ε_1は他のε_j(j>1)より影響度が強いこともわかる. $\{\varepsilon_j\}$は一対比較を実行する者の精緻度を示すものである. 以下$\{\varepsilon_j\}$が互いに独立に確率分布するものとして, いくつかの場合を考察する.

次のように記号を定める.

$(1+\varepsilon_1)^{2/n}$ の平均と分散を m_1 と $\sigma_1{}^2$

$(1+\varepsilon_j)^{1/n}$ の平均と分散を m_j と $\sigma_j{}^2$ (j=2,...,n-1)

g_n/g_1の平均と分散を M と V とする.

そのとき簡単な計算により次の命題が成立する.

[命題1]

(3.5)式の右辺において各ε_jが独立に確率分布するとき

(3.6) $M = \Pi_{j=1}{}^{n-1} m_j$

(3.7) $V = \Pi_{j=1}{}^{n-1}(m_j{}^2+\sigma_j{}^2) - \Pi_{j=1}{}^{n-1} m_j{}^2$

である.

(1) 正規分布に従うとき

ε_jが$N(0,\sigma^2)$に従うものとする. ただし$-1<\varepsilon_j<1$ とし, 正規分布をこの範囲に打ち切ったものとする. いま$\sigma^2=0.05(\sigma=0.2236)$ および$\sigma^2=0.01(\sigma=0.1)$のときの M および標準偏差 $S=V^{1/2}$の値を数値計算により求めた結果を表3. 1に示す.

(2) 一様分布に従うとき

ε_jが区間$[-\delta, \delta]$の一様分布に従うときを同様に調べる. $\delta=0.4$のときの一様分布の分散σ^2は$0.0533(\sigma=0.2309)$である. $\delta=0.2$ のときの一様分布の分散σ^2は$0.0133(\sigma=0.1155)$である. 2つの場合の M および S の値を表3. 2に示す.

(3) 三角分布に従うとき

ε_jが$[-\delta, \delta]$ の三角分布に従うとき, ただしε_jは 0 を軸に対称な分布と

する．$\delta=0.5$ のとき三角分布の分散σ^2は0.0417($\sigma=0.2041$)である．$\delta=0.25$のとき三角分布の分散σ^2は0.0104($\sigma=0.1021$)である．両方の場合の M および S の値を表3．3に示す．

表3．1　正規分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.988	.983	.981	.979	.978	.977	.977	.976	.976	.975
	.998	.997	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.995	.995
S	.169	.140	.122	.109	.099	.092	.086	.081	.076	.073
	.075	.061	.053	.047	.043	.040	.037	.035	.033	.031

注：上段が$\sigma^2=0.05$($\sigma=0.2236$)のとき，下段が$\sigma^2=0.01$($\sigma=0.1$)のときの値

表3．2　一様分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.988	.983	.980	.979	.977	.977	.976	.976	.975	.975
	.997	.996	.995	.995	.995	.994	.994	.994	.994	.994
S	.173	.143	.123	.110	.100	.092	.086	.081	.076	.073
	.086	.071	.061	.055	.050	.046	.043	.040	.038	.036

注：上段が$\delta=0.4$($\sigma=0.2309$)のとき，下段が$\delta=0.2$($\sigma=0.1155$)のときの値

表3．3　三角分布

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	.990	.987	.984	.983	.982	.982	.981	.981	.981	.980
	.998	.997	.996	.996	.996	.996	.995	.995	.995	.995
S	.153	.127	.110	.100	.089	.082	.077	.072	.068	.065
	.076	.063	.054	.048	.044	.041	.038	.036	.034	.032

注：上段がδ=0.5(σ=0.204)のとき，下段がδ=0.25(σ=0.102)のときの値

これらの結果をみるとMやSは$\{\varepsilon_j\}$の分布の型にあまり左右されず，標準偏差σによってほぼ決まることがわかる．1/n乗という演算がこのような結果を生んだものと思われる．

4．相対誤差と絶対誤差の関係

これまでε_jをa_{nj}がa_{1j}に対してもつ相対誤差として定義したが，そのとき絶対誤差は$a_{1j}\varepsilon_j$である．仮にε_jが正規分布$N(0, 0.1^2)$に従う場合にはε_jが区間[-0.2,0.2]に生ずる確率は約95%であるが，a_{1j}の値に応じて絶対誤差の95%の区間は表4．1のようになる．すなわち，その区間に含まれるＡＨＰスケールは表の当該（１）のようになる．また区間[-0.25,0.25]に生起する確率は約99%であるがそこには表の当該（２）のＡＨＰスケールが含まれる．

ここで相対誤差の大きさについて考えてみよう．相対誤差σ=0.1(10%)というのはＡＨＰのスケールがほぼ10点法に従っていることから，妥当な値であると思われる．仮にＡＨＰが100点法のスケールを用いているならばσ=0.01(1%)位にすべきであろうが，それ程厳しくすることは人間の能力を越えている判定ではなかろうか．表4．1でみると絶対誤差のカバーするスケールが中央の1/2，1，2，3の所で若干厳し過ぎるようにも見えるが，この辺の値にたいしては人間の感覚が十分敏感に対応すると思われる．これらの理由からσ=0.1（10%）という相対誤

差を以下では採用する．

表4．1　絶対誤差とスケール

a_{ij}	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
当該	1/9	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/3	1/2	1	2	3	4	4	5	6	7	8
(1)	1/8	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4							5	6	7	8	9
		1/7	1/6	1/5									6	7	8	9	
当該	1/9	1/9	1/9	1/7	1/6	1/5	1/4	1/2	1	2	3	3	4	5	6	6	7
(2)	1/8	1/8	1/8	1/6	1/5	1/4	1/3					4	5	6	7	7	8
		1/7	1/7	1/5	1/4							5	6	7	8	8	9
			1/6													9	

5．コピーまがいの検出法

相対誤差ε_jの分布として$\sigma=0.1$を採用した場合，コピーまがいを検出する方法を次に提案する．$\sigma=0.1$ に対する g_n/g_1 の平均と標準偏差は表3．1の通りであった．この表から M=1 としても実用上は支障がない．そこで標準偏差の2倍の範囲を考察して次表を得る．

表5．1　　コピーまがいの範囲

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2S	.15	.13	.11	.10	.09	.08	.07	.07	.07	.07

すなわち重要度が比率で上記の範囲内にあるものはコピーまがいとする．

具体的には重要度 $w_1, w_2, ..., w_n$ を大きい順に並べた上で上位のものから下位のものを見てその比率が 1-2S の範囲にあるものを上位のもののコピーまがいとして行く．先にも述べたように，最終的な判定は一対比較表（通常複数）を見ながら実行しなければならない．仮に k個の評価基準 $C_1, ..., C_k$ がであるとして，その重要度を $c_1, ..., c_k$ とするとき，非常に小さい重要度の評価基準上で一対比較値が異なっていても，コピーまがいとして検出される場合があることに注意したい．そのような２つの代替案はその一対比較行列上ではコピーまがいでないと判定されるだろうが，実質的にはコピーになっている場合があることを示唆する．コピーまがいの判定には評価基準の重要度まで考慮しなければならない．

注）Saaty の判定法との違いについて

ここで Saaty[5] の提案との違いについて説明しておきたい．Saaty は A の要素 a_{ij}を$a_{ij}\pm 0.5$としてランダムに攪乱させた行列を作り，その行列の固有ベクトルを求めて，元の行列の固有ベクトルと比較している．具体的には$a_{ij}\geq 1$のときは0.5と-0.5をランダムに採用し，$a_{ij}<1$のときは$1/a_{ij}$にたいして±0.5 をランダムに攪乱させてから元に戻しているようである（論文にはそのことは明示されていないが）．なお，0.5 と-0.5 をランダムに取る場合と区間[-0.5,0.5]の一様分布をする場合の両方をモンテカルロ実験している．その結論として重要度の差が 10% 以下のものをコピーまがいとしている．実験の結果は行列の次数 n に若干作用される（n が大になるほど，差の相対値は減少する）が本レポートで提案したような大きな変化はない．Saaty の方法と本方法の基本的な違いは次の点にある．Saaty は絶対誤差がＡＨＰスケールのどの値でも一定であるという仮定をしている．それにたいして本方法では相対誤差が一定であると仮定している．ＡＨＰスケールの中央付近での 0.5 の変化と端の 0.5 の変化とが感覚的に同じとするのが Saatyの場合であり，それを異なるとするのが本レポートの場合である．この点を解明することは今後の課題である．

6．ソフトウエア上での実現法

ＡＨＰのソフトウエアは対話型のものが殆どである（[2],[4]）．そこでそのようなソフトウエアに上記の手順を組み込む方法について提案する．

①　まず，コピーまがいの検出が必要かどうかを使用者に聞く．必要と答えた場合には以下の処理を行なう．

②　通常のＡＨＰの計算により最終的な代替案 $A_1,...,A_n$ の重要度を求める．それを大きい順に並べて，大きい方から順に第５節に述べた方法によりコピーまがいのものを検出して行く．仮に A_i と A_j がコピーまがいの疑いがあるとしよう．このとき重要度の大きい評価基準に関する A_i と A_j の重要度を調べ，その比率が表５．１の値の範囲外にあるものはコピーまがいではないと判定する．このテストにすべて残ったものを一応コピーまがい候補として，一対比較行列上の第i行と第j行の値を，評価基準の重要度とともに，画面上に出す．使用者はその値をみて A_i と A_j がコピーまがいに属するかどうかを決定する．

③　A_i と A_j がコピーまがいであると決定した場合，それをまとめて１つの代替案とし一対比較表のサイズを１つ小さくする．仮に A_i行にまとめたとする．そのとき

新$a_{ii}=1$，新$a_{ik}=(旧a_{ik}旧a_{jk})^{1/2}(k\neq i)$，新$a_{ki}=1/新a_{ik}$，他の行列の要素は元のままとすればよい．

④　縮小した一対比較表をもとにＡＨＰの計算を実行する．

注１）コピーまがいのものは２つの代替案に限らない．３つ以上のものが互いにコピーまがいになっている場合もあり得る．
注２）②でコピーまがいの疑いのあるものを重要度の大きい代替案について比較するとしたが，具体的には次のようにする．重要度の大きい順に累積重要度が.9(90%)に達するまでの評価基準について比較する．
注３）③では新しい一対比較行列の当該行を旧表の幾何平均値で置き換えたが，使用者が再び一対比較をやり直すようにしてもよい．

7．おわりに

このレポートではＡＨＰの欠点としてしばしば指摘されているコピーまがいの代替案を検出する方法を提案した．またこの方法を用いる際の実際的な取扱い方についても述べた．ＡＨＰを正しく使うためにこの方法がソフトウエアに組み込まれることを希望する．

参考文献

[1]Dyer,J.S.,"Remarks on the Analytic Hierarchy Process", Management Science, Vol.36, No.3 (1990).

[2]Expert Choice,Decision Support Software.

[3]Golen,B.L. and Q.Wang,"An Alternate Measure of Consistency", in The Analytic Hierarch Process:Application and Studies,Golden,B.L.,E.Wasil and P.Harker(Eds),Springer,1989.

[4]「ねまわしくん」, 日本科学技術研修所.

[5]Saaty,T.L.,"Rank Generation, Preservation, and Reversal in the Analytic Hierarchy Process", Decision Sciences, Vol.18, No.2 (1987).

[6]刀根薫, ゲーム感覚意思決定法－ＡＨＰ入門－, 日科技連出版,1986.