

マネジメントツールとしての  
DEA

刀根 薫

1996年4月2日

# マネジメントツールとしてのDEA\*

刀根 薫<sup>†</sup>

1996年4月2日

この小論では、DEA (Data Envelopment Analysis: 包絡分析法) ([2], [14]) の長所、限界、及びマネジメントに用いる際の注意事項についてのべる。

## 1 長所

1. これまで比率尺度の経営指標としては、1入力対1出力の単純な比率を用いることが多かった。例えば、資本利益率 = 利益 / 資本、売上高利益率 = 利益 / 売上高 等である。これでは経営の一部の面しか見ることができないので、いくつかの比率を対比させ、また複数の事業体 (DMU) の値を比較して総合的な判定を行ってきた。それに対して DEA は多入力・多出力をもつ複数の DMU 間の効率性の比較を多入力対多出力という一つの枠組みの中で行うことを可能にした。
2. 多入力多出力系の事業体の効率性を比率尺度で相対比較するが、そのとき  $DMU_o$  ( $o = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jo}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}$$

という仮想入力対仮想出力の比を用いる。ここに、 $x_{io}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) は  $DMU_o$  の入力値、 $y_{jo}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) は出力値でありデータとして与えるものである。 $(v_i)$ ,  $(u_j)$  は各入出力項目に対する重みであるが、それらを全 DMU について一通りに決めるのではなく—そうするとある DMU に

---

\*DEA as a Managerial Tool

<sup>†</sup>とね かつお: 埼玉大学大学院政策科学研究科 〒338 浦和市下大久保 255: Tel 048-858-3096: Fax 048-852-0499, E-mail:tone@poli-sci.saitama-u.ac.jp

とって有利になったり、ある DMU にとって不利になったりすることがある—その DMU にとって上の比率尺度が最も好ましい値になるように決める。そのため、重みは DMU 毎に異なる値を取る。このことにより、ある意味でフェアな重み付けができる。逆に DEA で非効率と判定された DMU は他のどんな重み付けによっても非効率的である。

3. 多入力多出力系の事業体の効率性を比較することは非常に難しいことであるが、DEA はそれを 0 から 1 (最も優れたもの) までの間の数値に投影することに成功している。しかも、その数値は根拠が明確であり、計算の手間も比較的少ない。
4. 非効率的と判定された DMU に対しては参照集合 (優位集合) (reference set) が判明するので、比較或いは模範となる DMU 群が明示される。また、 $\lambda^*$  の値は参照集合の中の DMU への近さを教えてくれる。
5. 効率的な DMU についても、参照集合へ出現する回数を数えることによって、その DMU が全体の DMU の中でどのような位置にあるかを知ることができる。もし、他の DMU によって一回も参照されていないような効率的 DMU があれば、それは孤立した (異種の) DMU である可能性が高い。
6. 技術的な効率値 ( $\theta^*$ ) 以外に、入力の余剰と出力の不足の所在を明らかにしてくれる。
7. 効率的な DMU の中には、ベンチマークになるものが見つかることができ、それに近づくように努力目標ができる。
8. 仮想的に標準的 DMU を作り、それを追加して解析することにより、相対評価を絶対評価に近づけることができる。
9. 一つの事業体の中でもいくつかの入出力関係がある。それらを別々に解析することによって、事業体の中のどの過程 (機関) に非効率が存在するかを知ることができる。例えば、営業人数、営業所規模を入力とし、売上高、売上げシェアを出力として、多数の DMU について DEA を行えば、売上げ効率性を見ることができる。一方、売上高、売上げシェアを

入力とし、売上利益を出力として解析すれば売上げ利益効率性を見ることが出来る。この2つの効率値を比較検討することによりそのDMUの特徴を探求することができる。

10. BCCモデルによって、効率的なDMUの規模の効率性を判定することができる。すなわち、増加型、一定型、減少型である。このようなDMU毎の規模の効率性の判定はCobb-Douglas等の従来の生産関数によっては期待できなかったことである。
11. 入力変数と出力変数の間に特定の関数型—例えばCobb-Douglas型—を仮定しない。こういった生産関数と呼ばれるものはあくまでも人為的なものでありその真偽は多くの場合不明である。仮に統計的検定によって否定されなかったとしても、他の関数が否定されないという可能性も残される。

それに対して、DEAは特定の関数型を仮定せず、あくまでも「データ自身に語らせる」という立場を取る。すなわち、ノンパラメトリックな手法である。

12. DEAに対して統計的手法として最小2乗法（OLS）、修正最小2乗法（COLS）、確率的フロンティア分析（Stochastic Frontier Analysis: SFA）が用いられることがある。これらの手法は、全データに唯一の式を最小2乗原理であてはめたり（OLS）、それを平行移動させてフロンティア分析を行ったり（COLS）（[8]）、各DMUにデータ誤差と非効率性を想定してそれらの値を統計的手法で分離する（SFA）（[5]）といった方針を取っているが、いずれも最小2乗原理で中心的（平均的）なデータの特徴を把握することから始まっている。それに対してDEAはフロンティア解析を直接対象とする。DEAでは非効率的なDMUは効率的フロンティアの形成になんら関与しないが、統計的手法では、通常、全データが効率的フロンティアの形成に影響を与える。数学的にはL2ノルム（最小2乗法）問題と片側L1ノルム問題（目標計画法の一種）の違いとして見ることもできる。

## 2 限界と批判

1. 入力変数間或いは出力変数間の代替可能性を仮定しているが、その前提は常に正しいか。
2. 入力変数間或いは出力変数の中にはその問題の当事者にとって非常に重要なものと、そうでもないものが同居していることがある。しかも、DEA はそれらを平等のものとして取り扱う。すなわち、評価に対する寄与は平等である。入力の変数の中に比較的重要でないものがあって、ある DMU がその値が小さいために効率的と判定されることもある。このことは、現実的な感覚からすればおかしいのではないか。
3. 変数の選び方や増減によって効率値 ( $\theta^*$ ) が変化するので、客観的な評価がむずかしい。(変数を増やせば効率値は非減少。)
4. DMU の集合の決め方によって効率値が変化するので、DMU の範囲を決めることが難しい。
5. どの DEA モデルを使うかによって効率値が異なる。CCR モデルで非常に低い効率値をもつ DMU が、BCC モデルでは高い効率値をもつことがある。どれを採用すればいいか迷う。
6. DEA で得られる改善案がそのまま実行可能であるとは限らない。
7. データにエラーが入っているとき、敏感に響く。(効率的 DMU のデータエラーは他の DMU の効率値に大きな影響を与える。)
8. 効率性 (efficiency) と、有効性 (effectiveness) 或いは収益性 (profitability) は違う。いくら効率がよくても収益が悪ければ意味がない。

## 3 マネジメントに用いる際の注意事項

以上の DEA の利点、限界及び批判を承けてマネジメントのツールとして用いる際の注意事項を述べる。

1. 入力変数と出力変数は直接または間接に関連しているものでなければならない。全く無関係と思われる入、出力間の解析は意味がない。また、相対的に、少ない入力で大きい出力を産出する DMU 程効率的と判定するので、入力変数や出力変数をその方針に沿って準備する必要がある。
2. DEA は次のような生産可能集合を仮定している。

$$P = \{(x, y) | x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, L \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq U, \lambda \geq 0\}$$

ここに、 $L \leq 1 \leq U$  であり、 $L = 0, U = \infty$  のとき CCR モデル、 $L = 1 = U$  のとき BCC モデルである。CCR モデルでは  $P$  に属する任意の 2 つの DMU の非負結合も  $P$  に属するという前提としており、BCC モデルでは任意の 2 つの DMU の凸結合は生産可能であるという前提に立っている。

入力（出力）変数間の代替性というのは、例えば、ある店が従業員 40 名、売り場面積 200 平方メートルで 1 億円の売り上げがあり、別の店が従業員 20 名、売り場面積 300 平方メートルで 1 億円の売り上げがあるとき、その中間の従業員 30 名、売り場面積 250 平方メートルの店でも 1 億円の売り上げが可能であるということの意味する。このことは、上の生産可能集合の定義に含まれていることである。

この仮定が成立しないような場合には、別のモデルを使う必要がある。例えば、Free Disposal Hull (FDH) model ([10], [11]), Nonconvex Frontier model ([6]) 等である。

3. 変数選択の問題では、まず、最も重要な入、出力変数を用いて DEA の計算を行う。そのため、分析に先立って、入力（出力）変数間の相関係数を求め、相関の高い変数群からは代表的なものを採用する。それから、次に重要と思われる変数を追加して再び DEA の計算を行う。一般に、各 DMU の効率値  $\theta^*$  は大きくなる（非減少）であるが、その変化の度合いを見ると、大きく影響される DMU と小さい変化しか受けない DMU がある。追加した変数に大きな重みがついているものは効率値  $\theta^*$  の変化が一般に大である。そして元からある変数の重みが小さくなってしまふこ

とがある。このように、変数を増減させながら、効率値の変化を観察し、その原因を調べるとともに、どの範囲までの変数を採用するかについて、当事者（マネージャー）のコンセンサスを得る必要がある。

更に、重要な変数とそうでない変数の間に重みの差を付けたいような場合には、領域限定法等を用いれば当事者の理解が得られ易い。

いずれにせよ、変数の増減は感度分析という立場からもいろいろ実験的にやってみて、それぞれの変数の影響を調べた上で、最終的な変数選定に達する場合が多い。

そのような意味でも、DEA は実地踏査的（exploratory）な手法である。

4. DEA のために採用する DMU の範囲についても、当事者のコンセンサスを得なければならない。ある DMU が入っているために、他の DMU の効率値が異様に小さくなっているような場合には、その DMU を外して再計算してみるのも一策である。その他、DEA に先立って、クラスター分析等により DMU 群をクラス分けすることも有効である。
5. ベンチマーク或いはスタンダードと思われる仮想的な DMU を作って、DMU 群に加え、再計算して見ることは有意義である。
6. 生産可能集合の形状については、CCR、BCC、対数型等のモデルを各種適用してみて、当事者（マネージャー）の意見や判断を参考にして決める。一般に CCR モデルの効率値と BCC モデルのそれが大きく食い違うことが多い。BCC モデルでは、どの入力変数でも最小の値をもつ DMU は効率的となり、どの出力変数でも最大の値をもつ DMU は効率的となる。これが CCR モデルの値との食い違いの大きな原因である。BCC モデルによる規模の効率性の判定では、多くの場合、小規模の DMU は増加型に属する。このことは規模の拡大や合併によってより効率的になる可能性があることを示唆している。また、大規模 DMU で規模の効率性が減少型のものは分割等によって効率性が向上する可能性があることを示している。BCC モデルで効率的 ( $\theta^* = 1$ ) な DMU でも、規模の効率性という観点からは改善の余地を残しているものが多い。

7. DEA による改善案はあくまでも一案である。その実行可能性については十分検討しなければならない。また、改善案を参考にして準改善案を作成し、それを DMU として用いて、効率値や入力余剰、出力不足の変化を考察することも有意義である。
8. データに含まれているエラーは DEA の計算結果に大きな影響を与える。特に、効率的な DMU のデータエラーは他の DMU の効率値に直接関係するので注意しなければならない。この点、他の統計的な手法—回帰分析等—よりも厳しい立場にある。確率的 DEA の手法を用いて解析する方法もあるが ([9], [1], [7])、まだ確立された手法とは言い難い。一度 DEA を解いてから、効率的と判定された DMU につきデータを精査したり、データを変動させてみてその影響を調べるのが現実的な対応策である。
9. 効率性と有効性、収益性との違いについては公企業と民間企業で立場が異なる。DEA はそもそも非営利機関 (not-for-profit organizations) の効率性を測定するための方法として開発されたという歴史的経緯があることに先ず注意したい ([2])。営利企業のコスト効率性や利益効率性の測定はいわゆるアロケーションモデルを用いて行うことができる ([14], [13])。

## 参考文献

- [1] Banker R.D., "Stochastic Data Envelopment Analysis", *Management Science*, accepted and to appear, 1991.
- [2] Charnes, A., W.W. Cooper and E. Rhodes, "Measuring Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 1, 429-444, 1978.
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y. and Seiford, M.L., "The DEA Process, Usages, and Interpretations", in *Data Envelopment Analysis*, edited by Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y. and Seiford, M.L., Kluwer Academic Publishers, pp.425-435, 1994.

- [4] Epstein, M.K. and Henderson J.C., “Data Envelopment Analysis for Managerial Control and Diagnosis”, *Decision Sciences*, 20, 90-119, 1989.
- [5] Fried, H.O., Lovell C.A.K. and Schmidt, S.S. (eds), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press, 1993.
- [6] Petersen, N.C., “Data Envelopment Analysis in a Relaxed Set of Assumptions”, *Management Science*, 36, 305-314, 1990.
- [7] Retzlaff-Roberts, D.L. and Morey, R.C., “A Goal-Programming Method of Stochastic Allocative Data Envelopment Analysis”, *European Journal of Operational Research*, 71,379-397, 1993.
- [8] Richmond, J., “Estimating the Efficiency of Production”, *International Economic Review*, 15, 515-521, 1971.
- [9] Sengupta, J.T., “Data Envelopment Analysis in the Stochastic Case”, *Computer and Operations Research*, 14, 117-169, 1987.
- [10] Tulkens, H., “On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit”, *Journal of Productivity Analysis*, (forthcoming).
- [11] Tulkens, H. and Eeckaut, P.V. , “Non-parametric Efficiency, Progress and Regress Measures for Panel Data: Methodological Aspects”, *European Journal of Operational Research*, 80, 474-499, 1995.
- [12] クーパー, 刀根, 高森, 末吉, “DEA の解釈と展望”, オペレーションズ・リサーチ,39,419-425, 480-485, 547-555,1994.
- [13] 末吉俊幸, “DEA による効率性分析に関する一考察”, オペレーションズ・リサーチ,35,167-173,1990.
- [14] 刀根 薫,「経営効率性の測定と改善」, 日科技連,1993.

- [15] 刀根 薫, “DEA のモデルをめぐって”, オペレーションズ・リサーチ, 38, 34-40, 1993.
- [16] 刀根 薫, “DEA のモデルをめぐって—再論—”, オペレーションズ・リサーチ, 40, 681-685, 1995.